GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEAMIENTO
DIRECCIÓN DE CURRÍCULUM

MATEMÁTICA

DOCUMENTO DE TRABAJO Nº4

E.
G.
B.

ACTUALIZACIÓN
CURRICULAR

GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEAMIENTO
DIRECCIÓN DE CURRÍCULUM

JEFE DE GOBIERNO
Dr. Fernando de la Rúa

VICEJEFE DE GOBIERNO
Dr. Enrique Olivera

SECRETARIO DE EDUCACIÓN
Dr. Horacio Sanguinetti

SUBSECRETARIO DE EDUCACIÓN
Prof. Mario Giannoni

DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEAMIENTO
Prof. María Luisa Lemos

DIRECCIÓN DE CURRÍCULUM
Lic. Silvia Mendoza

1997

EQUIPO DE PROFESIONALES DE LA DIRECCIÓN DE CURRÍCULUM

Asesora de Currículum: FlaviaTerigi

Coordinación de EGB: Cristina Armendano, Guillermo Micó

EGB

Beatriz Aisenberg, Helena Alderoqui , Silvia Alderoqui, Clarisa Alvarez, Claudia Broitman, Andrea Costa, Graciela Domenech, Adriana Elena, Daniel Feldman, Silvia Gojman, Sergio Gutman, Horacio Itzcovich, Mirta Kauderer, Verónica Kaufmann, Laura Lacreu, Delia Lerner, Silvia Lobello, Estela Lorente, Liliana Lotito, Susana Muraro, Nelda Natali, , Silvina Orta Klein, Cecilia Parra, Abel Rodríguez de Fraga, Patricia Sadovsky, Graciela Sanz, Analía Segal, Isabelino Siede, Mariana Spravkin, Adriana Villa, Hilda Weitzman de Levy.

MATEMÁTICA

Documento de trabajo nº4

Lic. Claudia Broitman
Prof. Horacio Itzcovich
Lic. Cecilia Parra
Prof. Patricia Sadovsky

ÍNDICE

PRESENTACIÓN GENERAL (Véase Textos que enmarcan...)

Introducción

Qué contiene este documento

En este Documento abordamos el análisis de la enseñanza de la multiplicación, de la división y de las fracciones, conceptos que se incluyen en el eje numérico del segundo ciclo.

La enseñanza de estos contenidos se inicia en el primer ciclo, y suele suceder que su abordaje en el segundo ciclo no esté del todo claro. ¿Qué hay que enseñar de la multiplicación y de la división una vez que los niños ya "saben" multiplicar y dividir? ¿Cuáles son los sentidos de las fracciones que los niños tienen que conocer en el segundo ciclo?

El aprendizaje de dichos conceptos es muy complejo y su construcción se da a lo largo de varios años. Es tan amplia la gama de situaciones en las que están involucrados que el desafío para la enseñanza es cubrir esa diversidad y garantizar una profundización creciente en el tipo de situaciones que se plantean a lo largo de la escolaridad.

Para que un trabajo como el propuesto pueda ser realizado es necesario disponer de un primer nivel de análisis didáctico que despliegue, a propósito de un concepto que se desea enseñar, un conjunto lo más exhaustivo posible de los tipos de problemas diferentes en los que este concepto es reconocido como el medio de solución a dichos problemas.

Los problemas suelen distinguirse por la operación con que se los resuelve o por el tipo de números involucrados. Así, se habla de problemas “de multiplicar”, de “sumar fracciones”, etc. Sin embargo, esta clasificación no es suficiente para pensar una enseñanza que se haga cargo de la complejidad de los conceptos. Es por esto que se despliegan en este documento otras clasificaciones, destinadas a mostrar la diversidad de aspectos que confluyen en la construcción de los sentidos de los conocimientos. Hemos de aclarar que dichas clasificaciones se presentan para contribuir al análisis de los docentes y no para ser enseñadas como tales. Las denominaciones presentadas pertenecen al ámbito de la comunicación didáctica y en ningún sentido constituyen una herramienta para el aprendizaje de los alumnos.

Si bien el documento incluye numerosos problemas y situaciones aptas para ser planteadas directamente a los niños, no hemos pretendido presentar una planificación de la enseñanza. Consideramos –como ha sido planteado ya en otros documentos de la Dirección de Currículum– que el análisis aquí desarrollado requiere de un abordaje institucional para que pueda ser aplicado a la enseñanza.

Nos parece importante volver a remitirnos al enfoque teórico planteado en el Documento de Actualización Curricular Nº1 sobre la enseñanza de la Matemática. Sugerimos su lectura pues desarrolla el marco general acerca de la concepción de Matemática, de su aprendizaje y de su enseñanza que subyace a este documento.

I. Acerca de la enseñanza de las operaciones

¿Cuentas versus problemas?

Durante mucho tiempo se ha considerado que los niños tenían que aprender primero a realizar las cuentas y luego a resolver los problemas en los que se aplica cada operación. Desde esta perspectiva los problemas se presentaban como ejercicios de aplicación y evaluación de las operaciones.

Sin embargo, sabemos que para que los alumnos puedan conocer las ocasiones de empleo de cada operación no alcanza con saber hacer las cuentas, es necesario además convertir a los problemas en un objeto de trabajo en el aula.

A partir de esta convicción, en los últimos años han aparecido numerosas críticas con respecto a la enseñanza mecánica de las cuentas y se ha insistido en que no es conveniente plantear a los niños cuentas en forma aislada, pues solo tiene sentido su enseñanza cuando se trata de resolver problemas.

Creemos que tanto la enseñanza directa de los algoritmos con su posterior aplicación en problemas, como el abandono de la enseñanza del cálculo son el resultado de una falsa dicotomía: cuentas versus problemas.

Esta dicotomía oculta el complejo interjuego existente entre los procedimientos y recursos de cálculo y la construcción y ampliación de sentido de las operaciones. Efectivamente, usar propiedades de las operaciones, anticipar, estimar, controlar resultados, son recursos que ponen en juego el sentido de las operaciones, a la vez que constituyen herramientas imprescindibles para abordar nuevos problemas.

Los niños pueden resolver cuentas que nadie les enseñó

¿Hay que enseñar a los niños a "hacer las cuentas" o se los deja inventar modos de resolverlas? Nuevamente en este caso creemos que se suele plantear el problema didáctico mediante una falsa oposición: enseñanza directa de la cuenta versus libertad de procedimientos de los niños.

Sabemos hoy que no basta con comunicar a los alumnos los pasos de resolución de las cuentas para que ellos comprendan el funcionamiento de los algoritmos. La enseñanza directa de los mismos y el énfasis puesto en su práctica esconde una ilusión: la creencia de que el saber puede ser transmitido de entrada en forma acabada.

Centrar el aprendizaje de las operaciones en la práctica no resolvió el problema del control de los significados –las diversas ocasiones de empleo de las operaciones– ni del control de los resultados.

¿Cómo enseñarles a los alumnos entonces a resolver operaciones sin apelar inicialmente a la comunicación de los pasos del algoritmo convencional?

¿Cómo hacer para que los chicos pongan en juego procedimientos diversos de cálculo?

¿Cómo enseñar a los niños a realizar estimaciones y a controlar las acciones que realizan en una cuenta?

¿Cómo hacerlos avanzar en sus procedimientos una vez que han conseguido desplegarlos?

Cuando el docente plantea a sus alumnos un problema para que resuelvan cuando aún no les "ha enseñado" la operación que lo resuelve, los niños no poseen un procedimiento experto pero tienen conocimientos que les permiten desplegar estrategias para abordarlo.

Es conocido por los docentes que para que los niños pongan en juego dichas estrategias es necesario que se garanticen ciertas condiciones:

– debe existir en el aula una legitimidad acerca de la diversidad de procedimientos posibles a utilizar,
– los alumnos deben disponer de ciertos conocimientos que les permitan resolver el problema planteado.

Proponemos que el trabajo de construcción de los algoritmos se plantee a partir de situaciones de exploración en las que los alumnos usen diferentes procedimientos poniendo en juego las propiedades de los números y de las operaciones. Este trabajo de exploración se verá enriquecido si los alumnos aprenden a realizar cálculos mentales, a elegir diversos procedimientos, a disponer de diferentes recursos de estimación y control de los resultados de las operaciones y a usar la calculadora.

En el trabajo que estamos proponiendo será fundamental que los niños puedan decidir la conveniencia de realizar un cálculo aproximado o un cálculo exacto, un cálculo mental o el algoritmo convencional.[1]

Una aclaración en relación con el cálculo mental se hace necesaria. Durante muchos años se consideró la enseñanza del cálculo mental como un ejercicio de control a través del cual los niños tenían que, por un lado evidenciar que memorizaban algunos resultados, y por otro dar muestra de rapidez para arribar a los resultados de una cuenta formulada y respondida oralmente.

Estamos muy lejos de esa propuesta. Concebimos al cálculo mental como un conjunto de procedimientos no algorítmicos de cálculo que se apoya tanto en las

[1] Remitimos al Documento de Actualización Curricular Nº 2 en el eje de Operaciones en el que se hace referencia al Cálculo Mental.

propiedades del sistema de numeración decimal como en las leyes que rigen el funcionamiento de las operaciones. Puede ser un cálculo realizado con lápiz y papel y no necesariamente es más veloz que el cálculo algorítmico. Su característica principal es la de ser un cálculo reflexionado. Cada operación es un problema a resolver.

Una última observación en relación con el uso de la calculadora: se suele oponer su uso al del cálculo escrito y al cálculo reflexionado, como si redujera la posibilidad de pensar o de ejercitar los cálculos. Por el contrario, consideramos que es una herramienta utilizable para investigar relaciones entre números.

El trabajo que estamos proponiendo implica por parte del docente la tarea de alentar en sus alumnos la invención y utilización de diversidad de procedimientos, coordinar que cada uno explique el "método" que ha utilizado, gestionar la puesta en común en la que se exponen tanto los procedimientos correctos como los incorrectos, promover la comparación de las diversas estrategias y el análisis de los errores, estimular la invención de nuevas estrategias entre todos los alumnos.

Este proceso de resolución y análisis por parte de los alumnos contribuirá al progreso en la utilización de estrategias más económicas de cálculo y a la sistematización de las propiedades de las operaciones.

La "cuenta" se convierte en un objeto de reflexión y estudio compartido en el aula, y en este trabajo se negocian los avances y se realizan acuerdos tendientes al dominio del algoritmo convencional.

En algunos momentos los avances que se acuerdan significan la homogenización de toda la clase en la utilización de algún procedimiento, como plantearemos para multiplicación y división en las páginas siguientes.

II. El campo multiplicativo en los números naturales

1. Los sentidos de la multiplicación

¿Qué significa saber multiplicar? No resulta sencillo definirlo. Algunos aspectos de lo que implica la enseñanza de la multiplicación en la escuela son claros, en cambio otros aparecen más desdibujados. Saber multiplicar es reconocer en qué problemas la multiplicación es un recurso para su resolución, es disponer de procedimientos para calcular productos, es establecer relaciones entre diferentes sentidos de este concepto (proporcionalidad, combinatoria, producto de medidas),es elegir las estrategias más económicas según la situación que se esté abordando y saber multiplicar es también reconocer los límites del concepto, es decir en qué casos la multiplicación no resulta un instrumento adecuado para resolver un problema.

En este capítulo abordaremos el análisis del campo de problemas multiplicativo, es decir aquellos para cuya resolución interviene la multiplicación y/o la división. Este análisis incluye problemas de proporcionalidad, de producto de medidas y de combinatoria que consideramos que los alumnos del segundo ciclo pueden abordar.

1.1- Problemas de proporcionalidad

¿<u>Qué es la proporcionalidad</u>?

En los problemas de proporcionalidad se relacionan dos magnitudes.

Por ejemplo:

En una caja hay 12 alfajores, calcular cuántos alfajores hay en 7 cajas.
Acá hay cuatro cantidades vinculadas entre sí.

1 caja	12 alfajores
7 cajas	x alfajores

Dos de esas cantidades se refieren a cantidad de cajas y las otras dos a cantidad de alfajores. En estos problemas se relacionan dos magnitudes (en este caso cantidades de cajas y cantidades de alfajores). El lector reconocerá acá los primeros problemas que plantea para enseñar multiplicación aunque no siempre se los ha reconocido como de proporcionalidad. La proporcionalidad aparece en la escuela generalmente en 4° grado como un tema "nuevo", sin embargo el concepto de proporcionalidad incluye un complejo campo de problemas cuyo aprendizaje abarca desde los primeros grados hasta los años medios de la escuela secundaria. En realidad hablamos del campo conceptual de la proporcionalidad para referirnos a la compleja red de conceptos involucrados (números, operaciones, medidas, etc.) y a la extensa gama de problemas que el concepto de la proporcionalidad permite resolver.

Una relación de proporcionalidad directa es una relación entre dos variables en la que el cociente entre las cantidades que se corresponden es el mismo y se denomina constante de proporcionalidad.

EJEMPLO (P: paquetes; F: figuritas)

P	F
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

Dos propiedades caracterizan la relación de proporcionalidad directa:

– Si se suman dos cantidades de una de las dos variables se obtiene una cantidad que se corresponde también con la suma de las dos cantidades correspondientes de la otra variable.

EJEMPLO (P: paquetes; F: figuritas)

	P	F	
	1	4	
+	2	8	+
	>3	12<	
	4	16	
	5	20	

– Si se multiplican dos cantidades correspondientes por un mismo número se mantiene la proporción. ("al doble el doble, al triple el triple, a la mitad la mitad, etcétera")

EJEMPLO (P: cantidad de paquetes, F: cantidad de figuritas)

	P	F	
	1	4	
x 2	2	8	x 2
	3	12	
	4	16	
	5	20	

Intentaremos mostrar las relaciones entre los problemas de proporcionalidad y problemas de multiplicar y dividir que aparecen en la escuela.

Veamos estos tres problemas:

– En tres bolsas de caramelos hay 12 en total. ¿Cuántos caramelos hay en cada bolsa si en todas hay la misma cantidad de caramelos?
– En una bolsa hay 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos habrá en 3 bolsas iguales?
– En 2 bolsas hay 8 caramelos ¿Cuántos caramelos habrá en 3 bolsas iguales?

Tradicionalmente estos problemas tienen rótulos que los caracterizan: el primero como un problema "de dividir", el segundo como un problema "de multiplicar" y el tercero como un problema "de regla de tres simple". Sin embargo estos tres problemas responden a la misma estructura: se trata de una relación de proporcionalidad directa. Por supuesto que los dos primeros problemas son menos complejos que el tercero, puesto que pueden resolverse mediante una sola operación.

Primer problema:

1-----------
3 -----------12

Segundo problema:

1 ----------- 4
3 -----------

Tercer problema:

2 ------------8
3 ------------

No se trata de que el docente anuncie en segundo o tercer grado que los dos primeros son problemas elementales de proporcionalidad. Se trata de que los alumnos tomen conciencia en algún momento de que un problema como el tercero puede pensarse como la composición de los problemas “de por” y de “dividir”. De hecho, cuando se lo resuelve por reducción a la unidad, lo que se está haciendo es coordinar ambos razonamientos.

No debe desvalorizarse la complejidad congnoscitiva de tal coordinación. El problema para el alumno es un problema nuevo que puede resolver apoyado en su experiencia previa con los problemas de multiplicar y de dividir. A medida que los alumnos avancen el aprendizaje de la proporcionalidad directa se irán introduciendo otras complejidades no reductibles a la coordinación de multiplicar y dividir.

Los problemas de proporcionalidad no son todos iguales.

Dos aspectos son relevantes al analizar la complejidad del campo multiplicativo: la clase de números y el tipo de magnitudes que involucran. El análisis de estos aspectos permitirá tomar en cuenta la complejidad de los problemas que se les presentan a los niños, graduarlos según las dificultades y los diferentes grados del ciclo. Por otra parte es importante revisar qué tipo de problemas aún los alumnos no han resuelto a lo largo del ciclo con el objetivo de ampliar la diversidad de situaciones que se les plantean. Es un objetivo importante que los niños reconozcan la mayor diversidad de problemas que se resuelven con una cuenta de multiplicar.

El dominio numérico transforma los problemas

Los problemas pueden involucrar números naturales o racionales. Estos últimos pueden estar expresados en forma fraccionaria o decimal. Si se trata de problemas con números naturales la complejidad varía según los números sean pequeños o grandes. Cuando los números son racionales la complejidad del problema varía si se trata de números mayores o menores que 1 y si están presentados en forma decimal o fraccionaria.

Como sabemos, los problemas son más complejos cuando tratan con números racionales que de números naturales. A medida que se agranda el tamaño de los números resulta más difícil realizar un control de las operaciones que se realizan. Esto influye en la posibilidad de estimar los resultados, de realizar cálculos mentales, etcétera.

Operar con números menores que uno también es una variable que complejiza el control de las operaciones. Sabemos qué diferente es para un niño poder realizar un cálculo como 35 x 12 que realizar 35 x 0,12. La multiplicación por un número menor que 1 da un resultado menor que el número por el que se ha multiplicado, y esto en muchos casos para los niños se convierte en una dificultad, y hasta a veces pueden no "creer" que se trata de un resultado correcto.

Las magnitudes transforman los problemas

Los problemas pueden referirse a magnitudes continuas o discretas. Operar con magnitudes discretas permite una representación más inmediata de la situación.

Por otra parte el trabajo con magnitudes continuas puede implicar diferentes niveles de dificultad. Los problemas con longitudes, por ejemplo, hacen jugar una relación que "falla" al trabajar con áreas. Efectivamente al trabajar con longitudes los alumnos han podido aprender que si dos longitudes son iguales coinciden al superponerlas. En el caso de las áreas la forma de una figura interviene y puede ocurrir –es lo más probable– que dos áreas iguales no coincidan al encimarlas. Por otra parte, cuando una magnitud se concibe como el producto o el cociente de otras (velocidad, volumen) aumenta considerablemente la complejidad de su tratamiento. Hay magnitudes de medición directa como la longitud, el peso, la capacidad, etc. Hay magnitudes que si bien pueden medirse directamente también pueden calcularse como el producto de otras dos magnitudes como la superficie, el volumen, etc. Otras magnitudes surgen del cociente de dos magnitudes (velocidad, densidad, por ejemplo).

Cuando se mide una superficie con otra superficie elegida como unidad, o un volumen con otro volumen como unidad estamos ante situaciones de medición directa, pero cuando se miden las longitudes de los lados y se calcula la superficie, o cuando se miden superficies y longitudes para averiguar volúmenes no se está realizando una medición directa sino un cálculo de las medidas a través del producto de medidas correspondiente a otras magnitudes.

Las variables relativas a **tipo de números** y **tipo de magnitudes** se combinan en cualquier problema. Las combinaciones intencionales del tipo de números y de magnitudes involucradas permitirán a los docentes por una parte, diferenciar problemas que desde el punto de vista de quien ya ha elaborado el concepto parecen iguales y por otra, secuenciar los problemas que se les plantean a los niños.

Consideremos algunos problemas de proporcionalidad que se resuelven solamente con una cuenta de multiplicar. Si utilizamos como criterio de análisis qué operación resuelve cada problema, los que siguen a continuación podrían aparecer todos como de un mismo nivel de complejidad. Sin embargo, si realizamos el análisis de los problemas a partir del tipo de números y de magnitudes involucradas, la complejidad se diversificaría dando lugar a una amplia gama de problemas multiplicativos de dificultad variable. Veamos los problemas:

a- Si en una bolsa hay 4 caramelos, ¿cuántos caramelos hay en 3 bolsas? (Este problema es con números naturales y pequeños y ambas magnitudes son discretas.)
*b- Cada caja de clavos posee 2440 unidades. Calcular cuántos clavos habrá en un camión que transporta 346 cajas. (*Este problema es con números naturales más grandes y con ambas magnitudes discretas.)
c- Un metro de soga cuesta 2,05 $ ¿Cuánto cuestan 5,75 m? (Este problema es con ambos números decimales mayores que 1 y las magnitudes son una discreta y la otra continua.)
d- Cada pastilla pesa 0,25 g. ¿Cuánto pesa un paquete de 12 pastillas? (En este caso un número es decimal menor que 1 y el otro es un número natural pequeño. Las magnitudes son una discreta y otra continua.)
e- 1 metro de tela cuesta 5,75 $. ¿Cuánto costará 0,40 m? (En este problema los números son decimales ambos, pero el valor correspondiente a la un metro es inferior a 1 y el del precio mayor que 1. El precio es una magnitud discreta y la medida de la tela es una magnitud continua.)
f- Cada botella llena con un litro de gaseosa pesa 1,25 kg. ¿Cuánto pesarán 16 botellas llenas con la misma gaseosa? (En este problema nuevamente hay un número decimal mayor que 1 y otro natural pequeño. Una magnitud es continua y la otra discreta.)
g- 28 personas decidieron poner 2,50 pesos cada una para comprar un regalo. ¿Cuánto dinero juntaron entre todas? (En este problema un dato es un número natural pequeño y el otro un número decimal mayor que 1. Las magnitudes son ambas discretas.)

A continuación se analizará en este último problema cómo podrían variar los procedimientos de los alumnos si tan solo se modificara uno de los números:

Si se presenta el problema con 28 personas que ponen $2,50 cada una se favorece el procedimiento de "juntar" a dos personas (lo cual da un total de $5) y luego, o bien sumar 14 veces $5 anotando al lado de cada suma cuántas personas van agregando su dinero, o bien multiplicar 5 x 14.

2,50 + 2,50	5 + 5 + 5 + 5 +........+ 5
5	5 x 14

Quienes recurran a un procedimiento de este tipo estarán utilizando –aun cuando no lo puedan formular explícitamente– la propiedad asociativa de la multiplicación:

2,50 x 28 = (2,50 x 2) x 14

5 x 14 = 70

Si bien los datos del problema favorecen la puesta en juego de un procedimiento como el anterior, no es seguro que el mismo aparezca en la clase. Más bien es probable que si surge, sean sólo algunos alumnos los que lo propongan. Es tarea del docente hacer circular los procedimientos que pueden dar lugar a las explicitación de las propiedades de las operaciones.

¿Qué hacer si ningún niño despliega un procedimiento de este tipo? No es fácil dar una respuesta contundente. El docente deberá decidir en función del momento de la clase si lo propondrá de todas maneras como para dar lugar a una discusión.

Veamos qué sucede si el problema se presenta con 30 personas: es posible que algunos niños puedan utilizar sus conocimientos sobre la multiplicación por la unidad seguida de ceros y realizar, por ejemplo, lo siguiente:

1 persona 2,50$
10 personas 2,50 x 10 = 25$
30 personas 25 + 25 + 25 = 75$

En este caso los niños estarían utilizando implícitamente la propiedad distributiva de la multiplicación. Pueden reconocer que

2,50 x 30 = 2,50 x 10 + 2,50 x 10 + 2, 50 x 10

o bien usar la propiedad asociativa al reconocer del mismo modo que en el ejemplo anterior que:

2,50 x 30 = 2,50 x 10 x 3

Al igual que en el caso anterior puede ser que este procedimiento sea utilizado por pocos niños o por ninguno y será tarea del maestro retomarlo si aparece solo en algunos niños o plantearlo si es que ninguno de sus alumnos lo ha utilizado.

Si se presenta el problema con 29 personas es más difícil operar como en el primer caso en el que se sumaban o multiplicaban los $5 de dos personas juntas, o usar la multiplicación por la unidad seguida de ceros como en el segundo caso. Algunos alumnos podrán apelar a la multiplicación por 10 para 10 personas, luego otras 10 y luego 9 veces recurriendo a una multiplicación de 2,50 x 9 y finalmente sumar los tres resultados; otros podrán hacer el segundo procedimiento y luego restarle al total obtenido para 30 personas el dinero de una persona = 75 - 2,50, por ejemplo.

Los procedimientos que utilizan los alumnos para resolver cada uno de estos problemas pueden ser variados. Los docentes podrán conducir la puesta en común de los procedimientos utilizados por los diferentes alumnos o grupos y su análisis y comparación. El objetivo es que los niños establezcan relaciones entre los números y obtengan conclusiones acerca de qué procedimientos son válidos y cuáles no, acerca de cuáles son los procedimientos más económicos, y sobre cuáles han sido las propiedades que han utilizado aún sin haberlas reconocido explícitamente. En el ejemplo anterior hemos tratado de mostrar cómo se favorecen ciertos procedimientos de los alumnos modificando solamente uno de los números del problema. El tamaño de los números y el conjunto numérico son variables que favorecen la aparición de ciertos cálculos y el uso de determinadas propiedades sobre las que habrá que trabajar.

Se trata en síntesis de modificar intencionalmente las variables del problema para que aparezcan ciertos procedimientos con el objetivo de que todos los alumnos puedan tener una representación más rica de la multiplicación. A partir del uso inicialmente intuitivo por algunos niños de algunas propiedades, el maestro podrá introducir ciertas reflexiones y conclusiones para que todos los niños puedan disponer de esa herramienta ya institucionalizada.([2])

1.2- Problemas de producto de medidas

Muchas veces, para calcular la medida de una cierta magnitud es necesario multiplicar medidas correspondientes a otra magnitud.

Un ejemplo es el cálculo de la medida de la superficie de un rectángulo a partir de los lados del mismo: la multiplicación de dos números que expresan medidas de longitud da como resultado un número que expresa la medida de una superficie.

En estos casos se pone en juego un sentido de la multiplicación diferente del de la proporcionalidad. A los problemas que ponen ese sentido en funcionamiento los llamaremos problemas de producto de medidas.

[2]- El concepto de institucionalización ha sido planteado en el *Documento de trabajo nº1*, página 14

El producto de medidas es una relación ternaria en la que dos magnitudes se multiplican para obtener una tercera.

Analicemos ahora este otro problema:

Tengo tres remeras y cuatro pantalones. ¿Cuántos equipos diferentes se pueden formar?

Para averiguar cuántos equipos se pueden formar es necesario asociar cada una de las remeras con cada uno de los pantalones y contar cuántos pares resultan. El siguiente cuadro muestra una de las organizaciones posibles que facilitan esta tarea.

	Pantalón 1	**Pantalón 2**	**Pantalón 3**	**Pantalón 4**
Remera 1				
Remera 2				
Remera 3				

En este caso también se trata de un problema de producto de medidas: el número que expresa la cantidad de remeras multiplicado por el número que expresa la cantidad de pantalones da como resultado un número que corresponde a la cantidad de equipos posibles de ropa.

Para que los alumnos estén en condiciones de abordar estos problemas y de reconocer que pertenecen al campo multiplicativo, es necesario plantearse su enseñanza específicamente. En otras palabras, no es suficiente que los niños hayan interactuado con problemas que involucran relaciones de proporcionalidad directa para que estén automáticamente en condiciones de reconocer y resolver los problemas de producto de medidas.

Es posible que en un primer momento los niños que nunca han abordado este tipo de problemas utilicen diferentes procedimientos (dibujos, gráficos, etc.) para resolverlos y que, a medida que los vayan reconociendo como problemas multiplicativos, puedan apelar a procedimientos de cálculo.

<u>Los problemas de producto de medida son doblemente proporcionales</u>

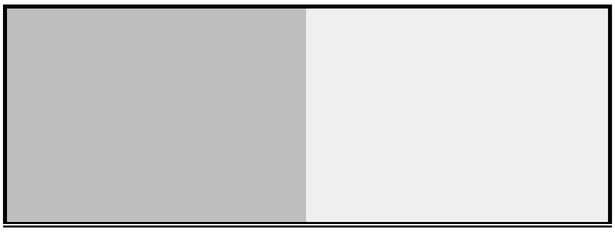
Observemos que cuando una magnitud es producto de otras dos existe una relación de proporcionalidad entre la magnitud producto y cada magnitud “factor”. Es por esto que son problemas de doble proporcionalidad.

Si tomamos el ejemplo de los equipos de ropa, podremos ver que al duplicar la cantidad de remeras, se duplicará el total de equipos que se puede armar –dejando estable el número de pantalones en 4–. Seis remeras y cuatro pantalones permiten armar 24 equipos diferentes. Hay una relación de proporcionalidad entre la cantidad de equipos y la cantidad de remeras.

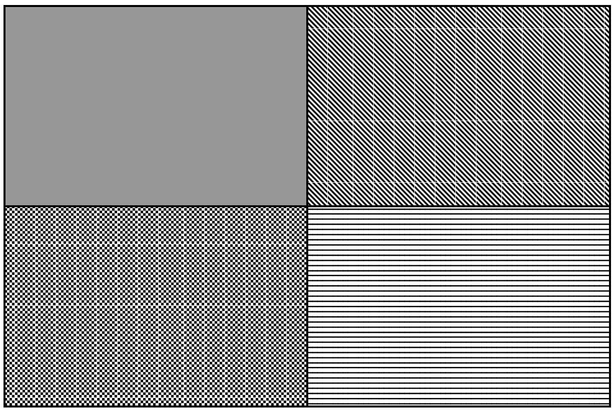
Por otra parte existe una relación de proporcionalidad entre el total de equipos y el de pantalones. Al duplicar, por ejemplo los pantalones a 8 –dejando estable la cantidad de remeras–, se duplican los equipos posibles: 3 remeras y 8 pantalones permiten armar también 24 equipos.

¿Qué sucede si se duplican al mismo tiempo los pantalones y las remeras? Los equipos se cuadriplican 6 remeras y 8 pantalones permiten armar 48 equipos. Por eso es una relación de doble proporcionalidad.

Lo mismo sucede en el ejemplo del rectángulo: la medida de la superficie es proporcional a la medida de cada lado. Por eso se plantea también una relación de doble proporcionalidad.



Si se duplican ambos lados simultáneamente la superficie no se duplica, sino que se cuadruplica.

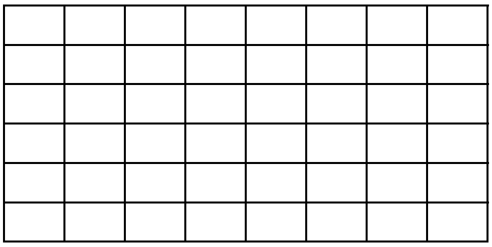


Este análisis permite comprender por qué los problemas de producto de medidas son más complejos que los de proporcionalidad. Los alumnos del segundo ciclo pueden abordar estos aspectos a partir de la resolución de problemas como los planteados. No se trata de que definan la relación de doble proporcionalidad, sino de que puedan sacar conclusiones a partir del análisis y el debate acerca de lo que sucede cuando se duplica una de las variables y cuando se duplican las dos.

¿Problemas de producto de medidas o de proporcionalidad?

Analicemos este problema:

Calcular en este patio rectangular la cantidad de baldosas



Los problemas de baldosas pueden ser considerados como un tipo de problemas que son de producto de medidas de cantidades discretas (baldosas por fila x baldosas por columna = total de baldosas). En estos problemas también se puede establecer una relación de doble proporcionalidad. Si se duplica la cantidad de baldosas por fila, se duplica el total de baldosas. Si se duplica la cantidad de baldosas por fila y por columna, se cuadruplica la cantidad total de baldosas.

Al tratarse de magnitudes discretas, la relación de proporcionalidad entre el total de baldosas y la cantidad de baldosas por fila (o por columna) puede ser un recurso para resolver el problema:

1 fila 8 baldosas
2 filas 16 baldosas, etc.

Es importante mostrar que, como sucede con todos los problemas multiplicativos, según cuál sea la incógnita, el cálculo que resuelve el problema puede ser una multiplicación o una división. En este caso en particular, si la incógnita se ubica en la cantidad de baldosas de uno de los lados, nos encontramos con problemas de división.[3]

Hemos planteado anteriormente que la clasificación de los problemas no se incluye en este documento para ser enseñada a los alumnos, sino para que los docentes puedan considerar la amplia gama de aspectos y la diversidad de situaciones que involucran los problemas multiplicativos que los niños del segundo ciclo pueden resolver. Al abordar este último tipo de problemas de embaldosado, los niños pueden considerarlos similares tanto a los de proporcionalidad como a los de producto de medidas.

Los niños de segundo ciclo podrán resolver problemas de baldosas, podrán asimismo investigar qué sucede cuando se duplican, triplican o cuadruplican las baldosas de uno o los dos lados, podrán comparar estos problemas con los de superficie de rectángulos.

La multiplicación no es reductible a la suma

Es usual que los niños intenten extender los modelos aditivos de los que disponen para pensar problemas multiplicativos. Esto puede llevarlos a cometer errores y es interesante provocar situaciones que permitan explicitarlos para luego rechazarlos.

[3] Para ampliar este punto ver el punto 2.3 correspondiente a división.

Una manera de establecer con los niños los límites de lo aditivo para pensar lo multiplicativo sería plantearles la siguiente secuencia de problemas:

Retomemos el ejemplo de las remeras y los pantalones. Si agregamos una remera más, quedan 4 remeras y 4 pantalones, es decir que el conjunto de equipos que se pueden formar se aumenta en 4 (los 4 pantalones con los que se puede combinar la remera agregada). El total asciende a 16, que surge de 12 + 4. Es decir que por cada remera que se agrega, la cantidad de equipos aumenta en 4.

Si agregamos 1 pantalón y dejamos fijo el número de remeras (en 3), se agregan 3 equipos, que resultan de combinar el nuevo pantalón con las tres remeras que teníamos, 3 remeras y 5 pantalones forman 15 equipos. Es decir 12 + 3.

¿Pero qué sucederá si agregamos al mismo tiempo un pantalón y una remera? La mayoría de los niños creerá que se agregan a los 12 equipos originales 7 más –dados por los 4 y los 3 calculados antes por separado– pues aplicarán un modelo aditivo. Sin embargo, si agregamos 1 pantalón y 1 remera se forman 20 equipos resultantes de la combinación de las 4 remeras con de los 5 pantalones, es decir no se agregan 7 sino 8 equipos. Veamos el dibujo:

	PANTALÓN 1	**PANTALÓN 2**	**PANTALÓN 3**	**PANTALÓN 4**	**PANTALÓN 5**
REMERA 1					
REMERA 2					
REMERA 3					
REMERA 4					

En el ejemplo original:

$$3 \times 4 = 12$$

luego al agregar 1 remera:

$$(3 + 1) \times 4 = 12 + 4 = 16$$

al agregar 1 pantalón:

$$3 \times (4 + 1) = 12 + 3 = 15$$

al agregar 1 remera y un pantalón:

$$(3 + 1) \times (4 + 1) = 12 + 4 + 3 + 1 = 20$$

En este caso no basta con ir sumando los equipos que se van agregando al agregar sólo remeras o sólo pantalones, es necesario tomar en cuenta los equipos que se forman combinando los nuevos elementos.

Al igual que en los problemas de proporcionalidad, los docentes podrán analizar que en los problemas de producto de medidas el tipo de números y el tipo de magnitudes que se utilizan pueden complejizar o simplificar significativamente los problemas. El análisis de dichas variables permitirá establecer criterios para proponer secuencias que atiendan a niveles de complejidad creciente para este tipo de problemas.

Es importante aclarar que tanto los problemas de combinaciones de equipos como los de baldosas, involucran magnitudes discretas. En el caso de los problemas de superficie en cambio, se trata siempre de magnitudes continuas.

Por otra parte, en los problemas en los que hay que combinar elementos de conjuntos finitos (como el de los equipos) siempre se trabaja con números naturales, en cambio los problemas de baldosas pueden exigir el uso tanto de números naturales como de decimales (las baldosas se podrían partir).

Finalmente queremos señalar que “el tamaño” de los números puede obligar a los niños a cambiar los procedimientos puestos en juego. En el problema de los equipos, por ejemplo, los procedimientos que resultan adaptados para resolver el problema con 4 pantalones y 3 remeras, pierden su eficacia si se trata de averiguar la cantidad de equipos a formar con 1234 remeras y 345 pantalones. Una vez más la variable numérica obligará a los niños a utilizar nuevos procedimientos. En este caso específicamente, los niños tendrán que "confiar" en la multiplicación, ya que no podrán hacer cuadros o esquemas que le permitan controlar el resultado.

Recordamos que cualquiera de los problemas analizados pueden ser problemas de multiplicar o problemas de dividir según en qué lugar se encuentre la incógnita y muchos de ellos serán retomados en el capítulo de división. Sin embargo analizaremos más adelante ciertas cuestiones específicas de la división que no quedan descriptas en estos problemas. Es decir, no todos los problemas de división pueden convertirse en problemas de multiplicación como sucede a la inversa.

Combinatoria

¿Cuántos equipos se pueden formar con tres remeras y cuatro pantalones?[4]

¿Cuántos números capicúas de 5 cifras hay?

¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se pueden armar con el 5, el 6, el 7, el 8 y el 9?

En una fiesta se encuentran seis amigos. Todos se abrazan con todos. ¿Cuántos abrazos hay?

En todos estos problemas es necesario contar la cantidad de elementos de una colección finita organizada de cierta manera. Tales problemas son el objeto del cálculo combinatorio y ponen en juego un nuevo sentido de la multiplicación; de ahí su inclusión en este capítulo.

[4] Este problema fue analizado como un problema de producto de medidas. En tanto puede ser pensado como un problema en el que hay que contar cuántos elementos tienen una colección en la que se combinan elementos de dos conjuntos finitos, también es un problema de combinatoria.

Analicemos, en primer lugar, el siguiente problema:

"El papá, la mamá, y el hijo quieren sacarse una foto, sentados uno al lado del otro. ¿Cuántas fotos diferentes deberán sacarse si quieren aparecer en todas las posibles ubicaciones?

Al presentar un problema como éste a los alumnos, es muy probable que ensayen diferentes "ubicaciones" para sacar la foto sin pensar en una cierta organización para hacerlo. Como consecuencia de ello, puede ser que los chicos den una respuesta sin estar seguros de haber contado todos los casos posibles, y de haberlos contado una sola vez. Un objetivo entonces es asegurarse **un criterio de exhaustividad**. Por ejemplo, (llamando P al padre, M a la madre y H al hijo) podemos pensar que, si el padre ocupa el primer lugar, habrá dos posibles fotos:

P H M

P M H

Un razonamiento análogo se puede hacer si el primer lugar es para la madre o para el hijo:

M H P

M P H

H P M

H M P

Resulta entonces que se necesitarán 6 fotos.

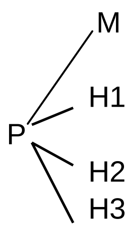
En principio, este problema se puede resolver sin "hacer ninguna cuenta". Es decir, el **objeto de aprendizaje es el procedimiento que asegure la exhaustividad**. Notemos que en el *Documento de trabajo nº2* ya se ha considerado la organización de datos como objeto de estudio y reflexión del eje “Tratamiento de la Información”.

Ahora bien, cambiando los datos del problema, ¿qué ocurrirá con este procedimiento si en la familia hay 5 integrantes (padre, madre y 3 hijos)?

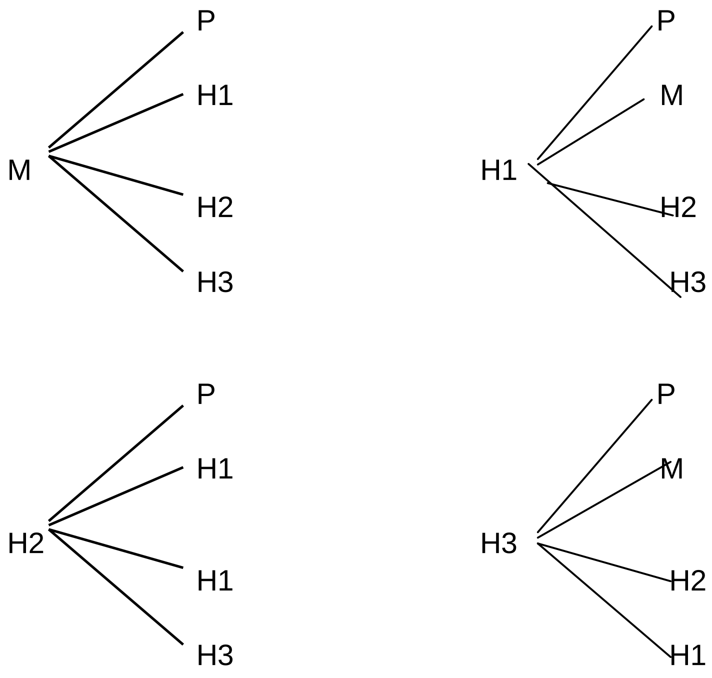
Evidentemente el recurso desplegado para el caso de 3 miembros, será poco económico y muy engorroso para ser desarrollado.

Se podrá entonces pensar en realizar una organización más cuidadosa:

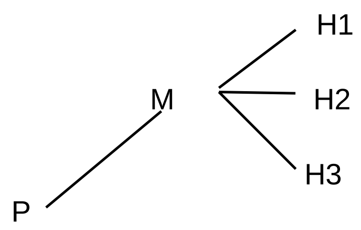
Si el padre se sienta en la primera silla, en la segunda se pueden sentar la madre o cualquiera de los 3 hijos, o sea hay 4 posibilidades para el segundo lugar:



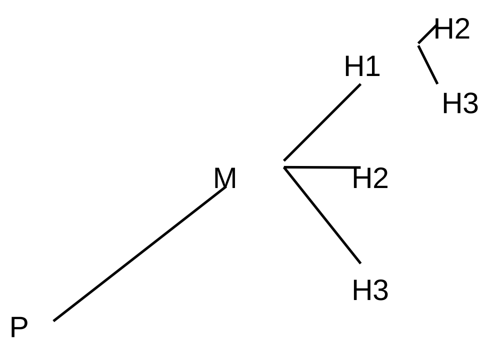
Lo mismo ocurre si en el primer lugar se sienta la madre o cualquiera de los hijos:



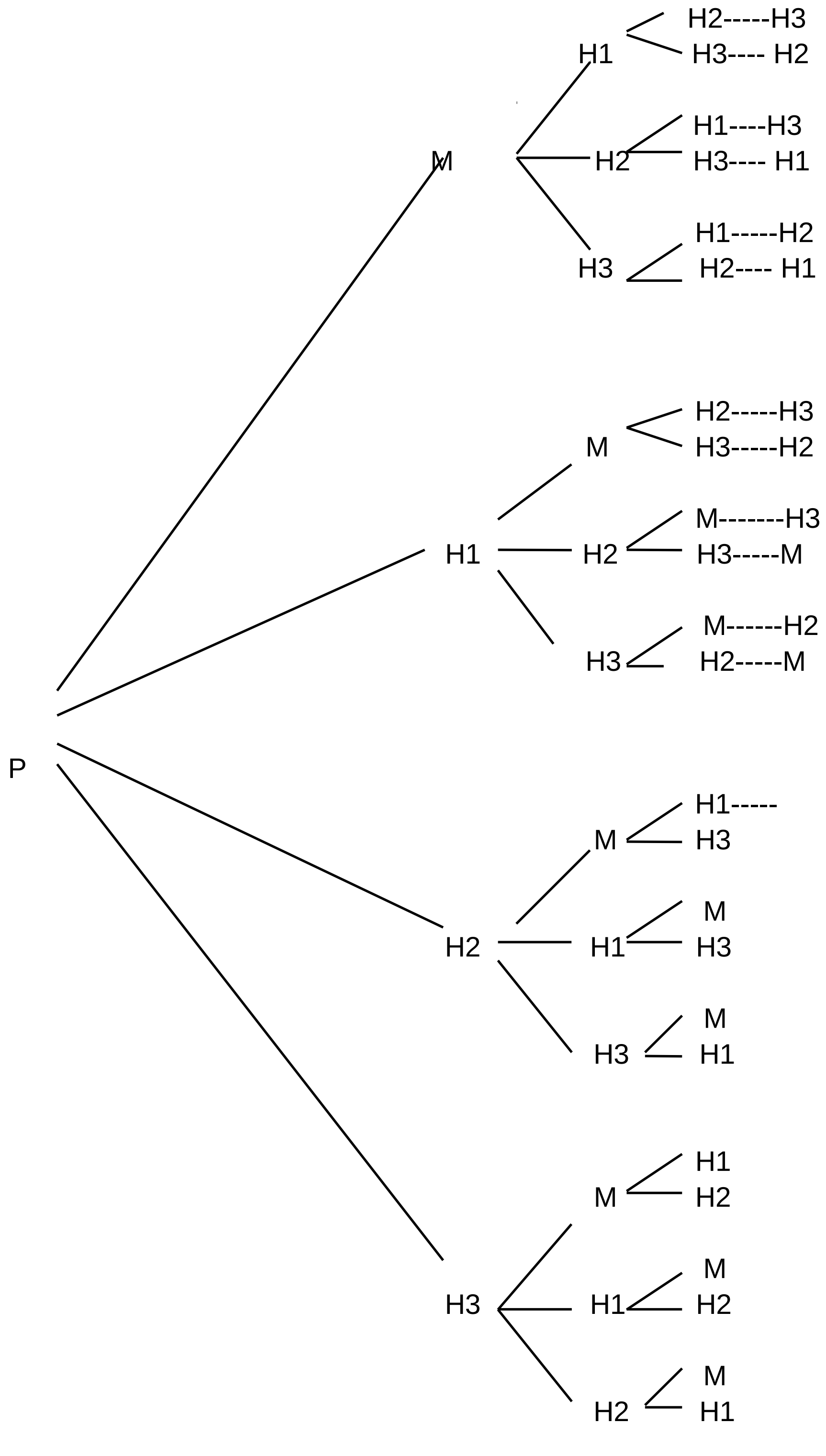
Si el padre se sienta en el primer lugar y la madre en el segundo, en la tercera fila se podrán sentar cualquiera de los tres hijos. La rama del primer árbol que ubica al padre primero y a la madre segunda se completaría de la siguiente manera:



Si ya se sentó el padre en la primera silla, la madre en la segunda silla, y el hijo 1 en la tercera silla, para la cuarta silla nos quedan 2 posibilidades: el hijo 2 o el hijo 3. Si sentamos al hijo 2 en la cuarta silla, sólo queda ubicar al hijo 3. Luego la representación de esta rama será



Veamos el diagrama arbolado ubicando al padre en la primera posición:



Resulta entonces que, ocupando el padre la primera posición, hay 24 fotos diferentes. Ahora bien, este diagrama realizado pensando que el primer asiento es ocupado por el padre, se podría desarrollar si el primer asiento lo ocupa la madre, el hijo 1; el hijo 2; o el hijo 3. Es decir, habría 5 diagramas arbolados diferentes, cada uno de los cuales da cuenta de 24 posibilidades diferentes. Existen entonces 24 x 5 = 120 fotos con las diferentes posiciones posibles.

El desarrollo de este problema permite apreciar el salto en complejidad que se produce cuando se aumenta de tres a cinco la cantidad de integrantes. Muchos niños que son capaces de producir una respuesta correcta para el primer caso, fracasan en el segundo.

Un aspecto central a destacar es el papel de la representación para captar la estructura multiplicativa de este tipo de problemas. Efectivamente, suele ocurrir que gracias a la representación en forma de diagrama arbolado o de tabla los niños reconocen que se trata de un problema de multiplicar. Resulta entonces indispensable que los alumnos logren producir buenas y diversas representaciones –apoyadas en una búsqueda exhaustiva de todos los casos posibles– antes de pretender el reconocimiento y la utilización de la multiplicación.

Es interesante insistir en el papel de los problemas con cantidades pequeñas: por un lado, si sólo se plantean estos problemas, los niños no tendrán necesidad de apelar a la estructura multiplicativa ya que los procedimientos de conteo exhaustivo resultarán suficientes; por otra parte, estos problemas con cantidades pequeñas resultan un apoyo indispensable porque permiten generar diversas formas de representación y son éstas las que favorecen que los niños descubran la multiplicación funcionando en la combinatoria.

Un problema de combinatoria en el aula

Les planteamos a niños de sexto grado el siguiente problema[5]

Para un torneo de fútbol participan 16 equipos. Cada equipo juega con todos los otros dos veces (local y visitante).
Primera pregunta:
¿Cuántos partidos se juegan en el campeonato?
Segunda pregunta:
¿Cuántas fechas hay? ¿Cuántos partidos se juegan en cada fecha?

El objetivo de esta situación es introducir un nuevo sentido para la multiplicación de números naturales a través de un problema de combinatoria. Hasta el momento los chicos habían resuelto fundamentalmente problemas multiplicativos de proporcionalidad directa. Los niños trabajan en grupos de a 4.

En un grupo se da la siguiente discusión:

Grupo 1
A1: es 16 x 16
A2: es 16 x 16 x 2 porque hay local y visitante
A3: no es 16 x 16 porque un equipo no juega consigo mismo
A2: ah! cada uno juega con los otros 15 dos veces, entonces cada equipo juega 30 partidos

[5] Agradecemos a la Prof. Marina Bendersky por habernos abierto las puertas de su aula.

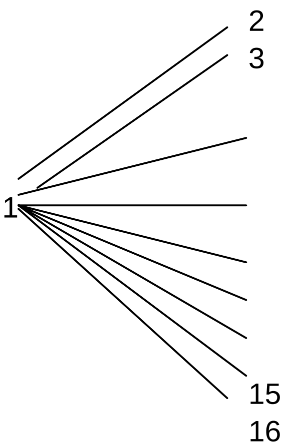
y como hay 16 partidos, en total se juegan 15 x 2 x 16.
(Todos los integrantes del grupo acuerdan en que esa es la respuesta).
A2: entonces es 15 x 16 x 2 = 480

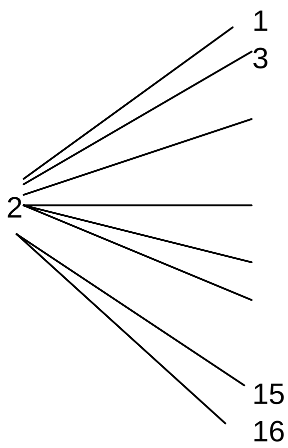
La maestra pasa por ese grupo y pide a los niños que expliquen por qué hicieron cada una de las cuentas.

Veamos las anotaciones de uno de los integrantes del grupo.

1 equipo ------------ 30 partidos 16
16 equipos------------16 x 30 x30
480

En otro grupo los alumnos acompañan el razonamiento anterior con un diagrama de árbol:





En un tercer grupo los alumnos hacen una tabla como la siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2	X		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
3	X	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
4	X	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
5	X	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
6	X	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7	X	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x
8	X	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x
9	X	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x
10	X	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x
11	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
12	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x
13	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x
14	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x
15	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x
16	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	

16 x 16 - 16 = 240

Salvo en el grupo de los alumnos que hicieron la tabla, en todos los demás grupos los niños sostienen que en el campeonato se juegan 480 partidos. La maestra no explicita su opinión para permitir que los alumnos mismos lleguen a encontrar el error en su razonamiento.

Veamos qué sucede en el grupo que había hecho los diagramas de árbol cuando pasan a la segunda pregunta:

Alumno 1: son 30 fechas, porque en cada fecha cada equipo juega un partido y como cada equipo juega 30 partidos, son 30 fechas.
Alumno 2: en cada fecha juegan 8 partidos, porque son 16 equipos y juegan de a 2.
Alumno 1: acá hay algo mal. Porque si hay 30 fechas y 8 partidos por fecha, hay 240 partidos y antes nos dio 480.
Alumno 3: justo el doble.
Alumno 4: hay que dividir por 2.
Alumno 2: no entiendo por qué lo anterior está mal.
Alumno 1: ya sé, cuando uno es local, el otro es visitante en ese mismo partido y nosotros hicimos como que primero son todos local y después son todos visitantes, por eso nos dio el doble.
Alumno 4: no entiendo
Alumno 1: fijáte en los diagramas. Acá (señala el árbol correspondiente al primer equipo) está el partido de 1 con y en éste (señala el árbol correspondiente al segundo equipo) está el partido de 2 con 1. No hay que multiplicar por 2. Es 15 x 16.

Los alumnos de este grupo detectan la contradicción entre las dos respuestas. Esta contradicción retroalimenta el problema y los lleva a seguir pensándolo. Notemos que de entrada, en este segundo momento, los niños se dan cuenta de que un resultado es el doble del otro pero no saben por qué. Ahora bien, es la necesidad de encontrar una explicación a esta contradicción la que le permite a uno de los alumnos darse cuenta de que habían contado doble. Es decir, lo que actúa como retroalimentación del problema no es solamente el hecho de detectar la contradicción sino el de establecer una relación entre los dos resultados.

Ahora bien, no en todos los grupos los niños detectan la contradicción. Es aquí donde la intervención de la maestra juega un papel crucial. Ella debe señalar la contradicción sin dar pistas para resolverla. Veamos lo que pasó en el grupo 1, en el que los niños también llegan a que hay 30 fechas y 8 partidos por fecha pero no se dan cuenta de que "algo no funciona".

Maestra: si hay 30 fechas y 8 partidos por fecha, ¿Cuántos partidos hay?
A1: 240 partidos
Maestra: ustedes dijeron que hay 480 partidos
A1: está mal
Maestra: ¿Qué es lo que está mal?

A2 : están mal las fechas, no son 30 fechas
Maestra: piensen por qué está mal

Los chicos muestran cierta perplejidad. Ahora saben que algo está mal pero no saben qué y su primera reacción es descartar el resultado correcto. Nuevamente la maestra pasa por una "prueba delicada", evitando confirmar el segundo resultado, su tarea más bien es sostener la búsqueda de los niños, si ella señala qué es lo que está mal y qué es lo que está bien, la búsqueda de los niños se volverá inútil.

La maestra se retira de este grupo. Los niños discuten y pasan alternativamente de pensar que la segunda respuesta es incorrecta a pensar que el error está en la primera. Cuando la maestra vuelve a ese grupo, los chicos siguen discutiendo sin avanzar. La situación está bloqueada. La maestra plantea entonces

Maestra: ¿No les servirá pensar el problema con menos equipos?
A: ¿Con cuántos?
Maestra: Fíjense ustedes.

Los chicos anotan entonces el nombre de cuatro equipos de fútbol y hacen un diagrama como el siguiente

River
Boca Independiente 3 x 2
Racing

River Independiente 2 x 2
Racing

Independiente Racing 2

Racing 0

Tiran las flechas para representar los partidos que juega Boca de local y multiplican por 2. Cuando van a representar los partidos que juega River, se dan cuenta de que Boca - River ya está contado dos veces, entonces dicen "River con Independiente y Racing, por 2". Finalmente un alumno dice hay que hacer

6 + 4 + 2 + 0 = 12

En ese momento un alumno dice que en el problema con los 16 equipos habían contado todos los partidos dos veces. Los niños "transfieren" la solución al problema original y anotan

30+28+26+24+22+20+18+16+14+12+10+8+6+4+2+0 = 240

Varias reflexiones surgen a partir del análisis de lo que sucede en este último grupo.

Por un lado, el problema ofrece la posibilidad de que los niños revisen su producción a partir de detectar contradicciones entre los resultados que van obteniendo. Pero esta posibilidad no radica solamente en la naturaleza del problema –el cual, por supuesto, juega un papel fundamental– sino en la relación que el maestro es capaz de gestar entre los niños y el problema. Para que esta relación sea posible, el docente debe anticipar cuáles van a ser sus intervenciones en caso de que la situación se bloquee. No se trata de no decir nada, sino de planificar un modo de intervención que acompañe el compromiso de los niños con el problema, que contenga la incertidumbre que les genera a los chicos no encontrar rápidamente una solución.

Hay una tercera cuestión que surge del análisis de esta clase. ¿No hubiera sido conveniente, a la luz de lo ocurrido, plantear primero el problema con una cantidad menor de equipos?

Para responder este pregunta es necesario que tomemos conciencia de que los niños dan una respuesta errónea porque aplican el modelo de la proporcionalidad directa (1 equipo 30 partidos, 16 equipos 16 x 30) que –como hemos visto antes– no se adapta a la resolución de problemas de combinatoria. El hecho de que los niños utilicen una estrategia correcta para resolver el problema cuando se disminuye considerablemente la cantidad de equipos, no significa que hayan rechazado el modelo de la proporcionalidad para tratar los problemas de combinatoria. Sin ese rechazo explícito no podrán enriquecer sus concepciones acerca del campo multiplicativo, no podrán elaborar nuevos modelos adaptados a la resolución de los problemas de combinatoria.

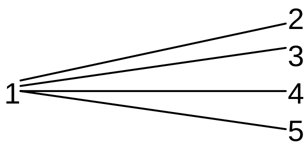
Cuando, en cambio, el recurso de reducir la cantidad de equipos se plantea como respuesta a la necesidad de encontrar las razones de una contradicción que los niños han reconocido, la estrategia de encontrar un método exhaustivo, es decir un método que contemple todas las posibilidades, resulta significativa para rechazar el modelo de la proporcionalidad.

Veamos algunos fragmentos de la puesta en común:

Maestra: vamos a analizar cómo resolvió cada grupo el problema

Pasa al frente el equipo que había detectado la contradicción al responder la segunda pregunta

Al.: Primero nos fijamos cuánto jugaba uno contra otros equipos. Anota en el pizarrón:



Al.: y así hasta 16.

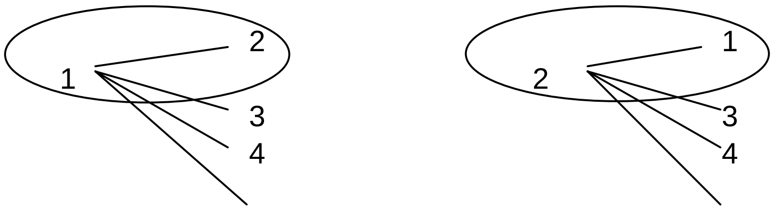
Algunos alumnos dicen 15 y otros dicen 16. Hay inquietud en el aula por saber si es 15 ó 16.

Al. Hay 15 posibilidades. Cada equipo juega 15 veces contra equipos. Con él no juega y después multiplicamos por 16.

Maestra: ¿Te estás refiriendo al total de veces que juega cada equipo?
Al.: No. Cuando juega de local. Hicimos 15 x 16 y acá ya está todo local y visitante cuando haga para todos lo mismo (señalando otro diagrama de árbol) estoy repitiendo, por eso hago 15 x 16.
Maestra: Vos antes dijiste que cada equipo juega 15 veces.
Al.: No, en total cada equipo 30 veces.

Notemos que, aunque Al. había dado muestras de entender el problema, la pregunta de la maestra la obliga a precisar sus argumentos y a aclararlos a los demás compañeros (y aclarárselos a ella misma).

Maestra: Al. hizo todo para ver cuánto juega un equipo
Una nena: no entiendo
Al. (Hace el mismo árbol para cada equipo y muestra cómo aparece el local y el visitante)



Pasa otro grupo
Al.: Nosotros para resolverlo hicimos las dos preguntas juntas. Primero vimos que cada equipo juega 15 veces de local. Después hicimos 15 x 2 = 30. Estos 30 son los partidos de revancha.
Maestra: ¿Hay 30 partidos de revancha?
Al.: No. Cada equipo juega 30 partidos entre partido y revancha. Después hicimos (anotando en el pizarrón).

30	x	8	=	240
total de partidos de un equipo		partidos por fecha		total de partidos

Maestra: ¿Por qué 30 x 8? ¿Qué es 30?
Al.: 30 son los partidos por equipo pero también son las fechas, porque en cada fecha, cada equipo juega un partido.
Al.: Ellos hicieron al revés, en vez de 16 hicieron 8 y en vez de 15 hicieron 30.
Al.: Son 16 equipos, cada partido juega con otro, entonces tenés que dividir por 2.
Maestra: ¿Qué es partidos por fecha?
Al1: los que juegan de local.
Al2: los que juegan ese día.
Al3 (de otro grupo): nosotros nos confundimos porque pensamos que en cada fecha se juega de local y visitante y entonces hicimos 15 + 15 y nos dio 30 partidos por fecha.
Maestra: (a Al3) ¿Cuántas fechas?
Al3: 30.
Maestra: 30 fechas y 30 partidos por fecha ¿cuántos partidos en total?
Al3.: 900.

Maestra: cuando resolvemos un problema, para comprobar si está bien o mal hay que encadenar los datos. Las distintas respuestas tienen que ser coherentes entre sí. Hay que comparar los distintos datos y ver si se ajustan. A ustedes había algo que "no les funcionaba", el tema es tratar de ver por qué no andaba.
Al3.: es que el problema no dice nada de las fechas.
Maestra: ¿ahora está claro qué es una fecha?
Al3.: sí.

Pasa un alumno del grupo que utilizó un procedimiento aditivo.

Al.: Primero nos equivocamos. El 1 juega 30 partidos, el 2 28, el 3, 26.
Muchos alumnos: ¡¡¡No!!! ¡¡Todos juegan 30!!
Al.: Está bien, todos juegan 30 pero los que jugó el 2 con el 1 ya los conté.
Muchos alumnos: no entiendo.

(Hay inquietud en la clase. Los alumnos piensan que lo que está haciendo este alumno. está mal)

Al: Hacemos los partidos del 1:

	2	
	3	
1	4	
	5	
	6	Son 15 partidos y lo multiplicamos por 2
	7	porque es local y visitante. Acá tenemos
	8	los 30 partidos del 1, ¿no?
	9	
	10	
	11	
	12	
	13	
	14	Cuando voy a contar los partidos del 2,
	15	ya conté los que juega con el 1,
	16	entonces no los tengo que contar, por eso son 28.

(La clase acepta el argumento)

Al. Entonces hay que hacer 30+28+26+24+22+20+18+16+14+12+10+8+6+4+2+0. El último es 0 porque ya contamos todos los partidos.
Al: así es muy largo.
Al.: no, no es tan difícil.
(Muchos alumnos dudan que la suma vaya a dar 240)
Al.: nosotros hicimos la suma y da 240.
Maestra: Cuando tenemos una cuenta así, es interesante que veamos si podemos hacer algo para "ahorrarnos" hacer una suma tan larga. Porque aunque la hagamos con calculadora, son muchos datos para poner. Fíjense

30+ 28+26+24+22+20+18+16+14+12+10+8+6+4+2+0

¿Cuántas veces aparece 30 en esta suma? (Pregunta la maestra señalando que la suma de los términos equidistantes da 30).

Varios chicos cuentan y dicen 8
Maestra: entonces es 30 x 8 que es la cuenta que habían hecho algunos de los otros grupos.

Hemos realizado un recorrido por diversos tipos de problemas multiplicativos. En el momento de plantear su enseñanza estos problemas deberán presentarse entre otros no multiplicativos de manera de exigir a los alumnos la discriminación pertinente. Sabemos que el sentido de un concepto se construye tanto cuando se está en condiciones de usar el concepto como cuando se tiene la posibilidad de rechazar sus usos no adecuados.

1.3 Recursos y estrategias de cálculo

Como ha sido planteado, uno de los desafíos de la enseñanza está dado por la relación que se busca provocar entre el trabajo a partir de problemas y el trabajo sobre el cálculo.

La capacidad de los alumnos de resolver problemas diversos depende, en parte, del dominio progresivo de recursos de cálculo. Para favorecer tal dominio es necesario plantear un trabajo a nivel de cálculo tanto a partir de los procedimientos de los alumnos frente a los problemas, como de actividades específicas del campo numérico.

Con relación a la multiplicación plantearemos actividades tendientes a que los alumnos puedan:

- construir un repertorio multiplicativo
- relacionar diversos procedimientos con el algoritmo de la multiplicación
- elegir el recurso más adecuado según el cálculo
- estimar y controlar los resultados

<u>La construcción de un repertorio multiplicativo</u>

En el *Documento de trabajo nº2*, relativo al primer ciclo, planteamos que:

"... en los primeros aprendizajes de la multiplicación los alumnos van a apoyarse en lo que saben, que es la suma: 6 x 3 es pensado y resuelto como 6 + 6 + 6. Hay un primer significado de la multiplicación que es el de suma reiterada. A lo largo de la escolaridad otros significados de la multiplicación han de ser trabajados y se deben seleccionar y plantear problemas que los pongan en juego, pero sin duda el poder pensar la multiplicación como producto está en parte condicionado por haber establecido ya un conjunto de relaciones multiplicativas entre los números (ej: 6x3=18), es decir, que un conjunto de productos básicos estén disponibles en memoria."

Los avances de los alumnos en los campos tratados en este documento –multiplicación, división y fracciones– requieren poder establecer relaciones multiplicativas entre los números. Esto debe ser entendido como una relación recíproca: a medida que trabajan sobre estos temas los alumnos se hacen capaces de establecer nuevas y más ricas relaciones entre los números. A la vez, las relaciones que son capaces de establecer les permiten un juego más potente de anticipaciones y un mayor control sobre su trabajo.

La construcción del repertorio multiplicativo se inicia en el primer ciclo y debe retomarse en el segundo. En este sentido consideramos importante que el maestro de 4º grado conozca cuál es el nivel de dominio de sus alumnos con relación al repertorio multiplicativo. Para ello podrá recoger información sobre el tipo de trabajo que han realizado sus alumnos en años anteriores y proponer a principio de año, actividades que le permitan a él y a los alumnos mismos establecer lo que saben y lo que tienen que aprender.

"Construcción del repertorio" significa más que memorización. Significa trabajar sobre las propiedades, establecer relaciones, organizar resultados etcétera.

Será necesario enseñar a los niños a apoyarse en los resultados numéricos conocidos para encontrar los no memorizados. Por ejemplo, si se sabe 6 x 6 = 36 pensar 7 x 6 como 6 x 6 + 6 = 36 + 6 = 42.

Se les puede proponer que escriban en una tabla pitagórica[6] los resultados que conocen y a partir de ellos la vayan completando. Para esto los alumnos se apoyarán en distintas propiedades de la multiplicación aunque éstas permanezcan implícitas. Organizar el análisis de la tabla de productos es un buena oportunidad para explicitar algunas de estas propiedades. Las observaciones de los alumnos permitirán referirse a la conmutatividad de la multiplicación, al reconocimiento del 1 como elemento neutro, etcétera.

Plantear problemas que permitan analizar las relaciones entre los números contribuirá a un uso reflexivo de las tablas de multiplicar. Los niños aprenderán dichos resultados, pero también tendrán elementos para construirlos a partir de otras multiplicaciones. Por ejemplo analizar equivalencias entre diferentes multiplicaciones: multiplicar por 8 es equivalente a multiplicar por 2 y por 4; multiplicar por 9 es equivalente a multiplicar por 3 y por 3, etcétera.

El repertorio multiplicativo del que los niños precisan disponer –además de las tablas del 1 al 9– incluye la multiplicación por 10, por 100, por 1000 ya que gran cantidad de cálculos mentales pueden basarse en la descomposición multiplicativa de los números. Además, la multiplicación por la unidad seguida de ceros es particularmente útil para la aproximación por productos y para la estimación de cifras del cociente, que se desarrollan en el apartado de división.

La relación entre diversos procedimientos de los alumnos y el algoritmo de la multiplicación

Como ha sido dicho, el terreno del cálculo puede ser trabajado desde situaciones problemáticas ante las cuales los alumnos usan diferentes procedimientos. La propuesta es tomar estos procedimientos como objeto de trabajo: compararlos, mejorarlos y también vincularlos con el algoritmo convencional.

[6] Tabla de multiplicación de doble entrada atribuida a Pitágoras, matemático griego que vivió entre los años 572 y 497 antes de Cristo

Veamos un ejemplo. Se les ha planteado a niños de cuarto grado el siguiente problema:

"Calcular cuántos caramelos hay en 30 paquetes si en cada uno hay 12 caramelos"

Los niños conocían el algoritmo de multiplicar por una cifra, pero aún no se les había "enseñado" a multiplicar por dos cifras. ¿Cómo pueden resolver este problema entonces?

A partir de lo que sí saben acerca de la multiplicación utilizan diferentes procedimientos, de los cuales algunos son correctos y otros no. En general van a tratar de usar las herramientas de las que disponen: usar sumas o "distribuir" el cálculo en productos por una cifra. Esto provoca que inventen propiedades de las cuales desconocen su validez. Se busca justamente centrar el análisis en esas producciones: no sólo con relación al resultado del problema sino también en cuanto a las estrategias desarrolladas y la posibilidad de usarlas en otras situaciones, para otros cálculos.

Algunos niños realizan los siguientes cálculos[7]:

a.- 30 x 10 = 300   30 x 2 = 60 300 + 60 = 360

Los niños que –presentadas de muy diferentes formas– han realizado estas dos cuentas de multiplicar y luego han sumado los resultados, han recurrido a la descomposición del 12 en 10 + 2 y a la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación.

b.- Algunos niños calculan cuántos caramelos habrá en 6 paquetes y luego lo multiplican por 2

6 paquetes = 30 x 6 = 180 y 180 x 2 = 360

En este caso los alumnos han aplicado la propiedad asociativa al descomponer el 12 en 6 x 2 y reconocer que 30 x 12 = 30 x 6 x 2.

c.- Otros niños establecen de diferentes formas cuántos caramelos hay en 10 paquetes y usan ese resultado para establecer la cantidad de caramelos de 20 y 30 paquetes.

10 paquetes = 120 caramelos
20 paquetes = 240 caramelos
30 paquetes = 360 caramelos

Algunos de estos niños se apoyan en su conocimiento de la multiplicación por la unidad seguida de ceros para averiguar la cantidad de caramelos de 10 paquetes y luego duplican o triplican ese resultado.

[7]En la enumeración de los procedimientos de los alumnos hemos preferido mostrar el nivel de conocimientos matemáticos involucrados más que respetar exactamente sus maneras de presentarlos. Para ello hemos usado formas de escritura que no son las de los niños y con el objetivo de enriquecer el análisis interpretamos las producciones de los alumnos en términos de uso de propiedades que, insistimos, son implícitas para los alumnos.

Otros niños descomponen el número 30 en 10 + 10 + 10, calculan 10 x 12 y suman tres veces ese resultado, es decir que, aunque no presentado de esta forma, están haciendo los siguientes cálculos:

12 x 30 = 12 x (10 + 10 + 10) = 120 + 120 + 120

d.- Otros niños realizan sumas sucesivas y en algunos casos agrupan de a "dos o cuatro paquetes".

12
12
12   4 paquetes
12

48
48   4 paquetes
48   4 paquetes
48   4 paquetes
48   4 paquetes
48   4 paquetes
48   4 paquetes
--
346 de 28 paquetes
+24 de 2 paquetes
---
360 de 30 paquetes

En este caso se han utilizado implícitamente las propiedades asociativa y distributiva de la multiplicación. Si traducimos lo realizado en una expresión aritmética resulta:

12 x 30 = (12 x 4) x 7 + (12 x 2)

En las estrategias de cálculo que los alumnos utilizan ponen en juego las propiedades de las operaciones.

También inventan propiedades que no son válidas. Por ejemplo:

e- Para resolver 30 x 12 puede suceder que los niños hagan
30 x 10 x 2. Apoyados probablemente en la descomposición de 12 en 10 + 2 los niños suponen que multiplicar por 12 es equivalente a multiplicar x 10 x 2

f - Otro niño realiza una descomposición usando las mitades de ambos números. Sabiendo que 30 es 15 + 15, y 12 es 6 + 6 podemos interpretar el procedimiento de este alumno de la siguiente manera:

30 x 12
(15 + 15) x (6 + 6)

él efectúa 15 x 6 + 15 x 6 . De las cuatro multiplicaciones necesarias para aplicar la propiedad distributiva en este caso realiza sólo dos, lo cual lo lleva a un resultado incorrecto.

El trabajo de confrontación deberá permitir el establecimiento de las propiedades válidas y el rechazo de los procedimientos apoyados en "leyes" que no son válidas.

¿Cuál es el objetivo de que los alumnos utilicen procedimientos diferentes para resolver una operación que nadie les enseño si muchos de ellos realizan procedimientos incorrectos? ¿Qué sentido tiene permitirles que inventen procedimientos para resolver operaciones que serán en muchos casos incorrectos y en otros costosos y largos?

Nuestro punto de vista es que la exploración de alternativas y el compromiso de establecer su validez son rasgos esenciales del quehacer matemático. En este sentido favorecerlos en el aula constituye una oportunidad para que los alumnos tengan una visión más plena de la matemática que pueda trascender su dimensión instrumental.

Se trata de que los alumnos puedan –a partir de los cálculos correctos e incorrectos que realizan– analizar cuáles son las propiedades que utilizan, preguntarse si el procedimiento que usaron para una cuenta servirá para otras cuentas, establecer finalmente estrategias válidas que pasarán a formar parte de su caudal de conocimientos.

Hemos planteado la importancia de proponer a los alumnos problemas que implican cálculos para los cuales no se les ha enseñado un algoritmo. Sin embargo, para que los alumnos puedan producir procedimientos interesantes, que permitan verdaderas evoluciones, se debe asegurar la disponibilidad de algunos recursos. Así, por ejemplo, antes de trabajar el algoritmo de la multiplicación es importante que se haya trabajado la multiplicación por 10, por 100, la multiplicación de un número entero de decenas por un número de una cifra (20 x 3), de un número entero de centenas por un número de una cifra (200 x 4), que se hayan usado y "puesto a prueba" algunas propiedades de la operación (conmutativa, asociativa, distributiva respecto de la adición).

Estos recursos de cálculo mental se deben trabajar constantemente, ya que permiten resolver muchos cálculos, son una vía de acceso a la construcción de los algoritmos y un medio de control.

Los procedimientos que los alumnos producen para resolver una multiplicación por dos cifras pueden ser reorganizados y vinculados con los pasos del algoritmo convencional para darle significado a estos.

Por ejemplo, uno de los procedimientos mencionados para 30 x 12 ha sido reorganizado espacialmente

30 x 12 = 30 x 10 + 30 x 2		30
= 300 + 60 = 360		x <u>12</u>
	2x30	60
	0x30	<u>300</u>
		360

El interés de un algoritmo como éste es que se toman los números enteros (2 x 30, en vez de 2 x 0 y 2 x 3 como se hace en el algoritmo convencional) y eso favorece el control sobre lo que se obtiene. Son por todos conocidos los errores que producen los alumnos porque olvidan "llevar" o no encolumnan correctamente. La propuesta que hacemos no es "a prueba de errores" pero busca favorecer la comprensión de lo que se hace para también ser capaz de reconocer cuando algo no está bien.

Veamos distintos algoritmos intermediarios:

	322
	x 23
(3 x 2)	6
(3 x 20)	60
(3 x 300)	900
(20 x 2)	40
(20 x 20)	400
(20 x 300)	6000
	7406

322		300 + 20 + 2
x 23	x	20 + 3
		900 + 60 + 6
6000 + 400 + 40		
6000 +1300 +100 + 6		
	7406	

La elección del recurso más adecuado según el cálculo

Los alumnos en la escuela tienen que aprender a evaluar en qué casos es realmente conveniente usar la calculadora, en qué casos pueden resolver la operación mediante algún procedimiento de cálculo mental y en cuáles conviene hacer la cuenta escrita.

Para estas operaciones:

20 x 35
234.958 x 234
230 x 45

podemos evaluar que para averiguar el resultado de 20 x 35 es útil, y conveniente hacer un cálculo mental

20 x 30 + 20 x 5 =700 ó 35 x 10 x 2 =700.

En cambio para realizar 234.958 x 234 es más útil usar la calculadora, es un cálculo que actualmente pocos adultos realizan en forma escrita.

Para resolver 230 x 45 puede ser útil escribir la cuenta y realizarla, si bien también se puede resolver mediante un cálculo mental o usando la calculadora.

Es importante dar con frecuencia ocasión a los alumnos de elegir los recursos que juzgan adecuados, al mismo tiempo que se les enseña a usar un tipo de cálculo como control en la utilización de otro, por ejemplo, la estimación mediante el cálculo mental aproximado como control al usar la calculadora.

El control sobre los resultados

Entendemos que para desarrollar en los alumnos una actitud de control sobre el propio trabajo y sus resultados se deben proponer actividades específicas y frecuentes.

Nos referimos, por ejemplo, a actividades en las que hay que elegir resultados que se juzgan razonables, analizar los cálculos, establecer relaciones, usarlas para obtener nuevos resultados, etcétera.

Presentamos algunas a título de ejemplo:

Sin hacer las multiplicaciones, elegí entre los propuestos el resultado que te parece exacto. Vas a tener que explicar las razones de tu elección.

a. 505 x 52 = ... *b. 98 x 37 = ...*

16.260 56.260 26.260 *30.626 3.626 6.626*

c. 47 x 29 = ... *d. 984 x 38 = ...*
1.363 10.363 2.963 *307.392 3.392 37.392*

Los alumnos pueden producir justificaciones como éstas, por ejemplo para el ejercicio a: "Si fuera 500 x 100 daría 50.000, como es x 50 tiene que dar más o menos la mitad así que elijo 26.260". Los cálculos propuestos han sido elegidos para favorecer el redondeo a 100, 1.000 o la mitad de estos números como recurso en la estimación. Al elaborar ejercicios de este tipo se deben anticipar los recursos cuya aparición se quiere provocar y en función de ello elegir los números.

En el ejercicio que sigue se busca que los alumnos puedan producir un resultado a partir del análisis de las relaciones entre un cálculo del que conocen el resultado y otro a resolver. El objetivo "de fondo" es que los alumnos adquieran el hábito de establecer relaciones entre diversos cálculos y sus resultados, lo cual es muy útil al resolver problemas –favorece la representación de alternativas de solución– y como medio de control al usar herramientas de cálculo, por ejemplo la calculadora.

Con la ayuda de los resultados dados,
calculá los otros productos

7 x 10 = 70 *11 x 3 = 33*

7 x 5 =.... *11 x 6 = ...*

En este otro ejemplo se ponen en juego más relaciones:

Utilizá el resultado de esta multiplicación

35 x 16 = 560

para calcular las siguientes

35 x 8 =

35 x 32 =

35 x 160 =

350 x 16 =

Al presentar los resultados, en la puesta en común, los alumnos tendrán que decir en qué se apoyaron para encontrarlos. Por ejemplo:

"Para 35 x 8 pensé en la mitad de 560, que es 280, porque 8 es la mitad de 16."
"350 x 16 me dio 5.600 porque 350 es 10 veces más grande"

Actividades de este tipo permiten verdaderas adquisiciones si se insertan en una secuencia de trabajo, si se las retoma para profundizarlas, extenderlas.

En otro momento puede plantearse:

Utilizá el resultado de esta multiplicación

42 x 15 = 630

para calcular la siguiente:

42 x 30 =

¿Qué otros cálculos podrías resolver a partir del dado ?

En este caso los alumnos tendrán que usar ciertas relaciones para generar un conjunto de cálculos vinculados. Por ejemplo 42 x 300, 21 x 30 etc. Esta actividad permite ver si los alumnos realmente se han apropiado de lo que está en juego en la propuesta y también poner en evidencia y discutir errores posibles.

Por ejemplo a partir de 25 x 12 = 300 un alumno propuso 50 x 24 = 600 diciendo "50 es el doble de 25 y 24 es el doble de 12, entonces el resultado es el doble". Trabajar sobre este error permite un análisis fino sobre qué sucede cuando se duplica un factor, cuando se duplican los dos. Este análisis se vincula con el sugerido para los problemas de producto de medidas.

Es importante que cuando una idea se ha precisado, una propiedad se ha establecido, se la ponga a prueba, se la haga funcionar.

Por ejemplo:

A partir de esta multiplicación,

15 x 6 = 90

pensá los factores faltantes en las siguientes.

15 x....= 45

15 x ...= 180

...x 6 = 180

...x... = 360

Un cálculo puede ser un problema

Hemos tratado de dar algunos ejemplos del trabajo que se puede realizar a nivel de cálculo. Dicho trabajo está al servicio de la capacidad de los alumnos de resolver problemas pero, además, puede ser enfocado con carácter de problema. De este modo, en el terreno del cálculo caben también la discusión, la justificación de opciones, el esfuerzo de lograr formulaciones adecuadas, etcétera.

Hemos tenido la intención de presentar en este apartado un análisis acerca de los tipos de problemas de multiplicación que los alumnos del segundo ciclo pueden abordar. Paralelamente mostramos la construcción progresiva de los recursos y estrategias de cálculo que consideramos importante que los alumnos adquieran en la escuela.

Cabe aclarar que la separación al interior del apartado entre tipo de problemas y recursos y estrategias de cálculo solo ha sido realizada con el objetivo de profundizar en el análisis, pero que el desafío es el trabajo simultáneo de ambos aspectos para provocar los avances de los alumnos en la construcción del significado de la multiplicación.

2- los sentidos de la división

Cuando se hace mención a la división, no son pocas las incertidumbres que aparecen tanto en los docentes como en los alumnos. Pero casi todas tienen algunos aspectos en común, producto tanto de la historia de su enseñanza como del concepto en sí: "lo más difícil es enseñar el algoritmo", "...los chicos no lo entienden", "...saben hacer la cuenta de dividir pero no comprenden lo que hacen..."

Esta centración en el algoritmo muchas veces deja de lado otros aspectos que también son esenciales:

-¿Qué problemas plantear para enseñar la división? ¿Son todos de la misma complejidad?
-¿Están los chicos en condiciones de resolver un problema de división antes de haberles enseñado el algoritmo convencional? ¿Con qué recursos?
- Los distintos procedimientos desarrollados por los alumnos ¿implican todos el mismo nivel de conceptualización?
Si no, ¿hay que privilegiar unos por encima de otros?, ¿con qué criterios?
-¿Cómo articular las estrategias de los alumnos con los procedimientos que hay que enseñar? ¿En qué momento plantear la cuenta? ¿Hay que dar cuentas sueltas para que practiquen o alcanza sólo con los problemas?
-¿El cálculo mental pone a los alumnos en mejores condiciones para abordar los problemas? ¿Por qué?

En este capítulo intentaremos responder algunas de las cuestiones planteadas.

Seño: ¿Cuántos decimales bajo?

Esta pregunta seguramente resultará familiar y da cuenta de la gran variedad de resultados posibles que se pueden obtener frente a una división. Efectivamente, según el problema que se esté resolviendo, una misma cuenta puede remitir a resultados diferentes. Veamos estos ejemplos:

1) Se quieren repartir 25 caramelos entre 3 chicos de manera que a todos les toque la misma cantidad. ¿Cuántos le corresponde a cada uno?
2) Completar la siguiente tabla de proporcionalidad directa:

3	*1*
25	

3) Tres amigos gastaron en un almuerzo $25. Deciden que todos van a pagar la misma cantidad. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

Cada uno de estos problemas se resuelve con la misma operación: 25 : 3. Pero las respuestas de cada uno de ellos son bien diferentes:

en el problema 1) es 8 caramelos para cada uno y sobra 1
en el problema 2) es 25/3
en el problema 3) es $8,33

Esto demuestra que cuando hablamos de dividir un número por otro no estamos diciendo algo del todo preciso. Por otra parte, la complejidad de la operación varía en la medida en que varíen los problemas que se plantean.

Consideremos nuevamente los problemas 1, 2 y 3:

En el problema 1 se espera que el resultado sea un número natural, y es posible de ser escrito:

$$25 = 8 \text{ x } 3 + 1 \qquad \text{o bien} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 3 \\ \cline{2-2} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

En general, hay toda una variedad de problemas que remiten a la *división entera o euclidiana*, esto es, dados dos números naturales (dividendo y divisor) es necesario encontrar otros dos números naturales (cociente y resto) de manera tal que:

dividendo = divisor x cociente + resto
(a = b x q + r)

con resto mayor o igual que cero y menor que el divisor.

En cambio en el problema 2 hay que encontrar un número que al multiplicarlo por 3 nos dé 25. Este número es 25/3 (constante de proporcionalidad). En este caso el problema remite a la *división exacta*, esto es, dados dos números enteros (dividendo y divisor), encontrar un tercer número (cociente) de manera tal que:

dividendo = divisor x cociente
(a = b x k)

A diferencia de la división entera, en este caso existe la posibilidad de que el cociente no siempre sea un entero, como en el caso del ejemplo, 25/3.
(Tanto en la división entera como en la exacta, el divisor debe ser un número diferente de 0.)

Es la división exacta (y no la entera) la que permite establecer la relación entre la multiplicación y la división como operaciones inversas.

A su vez, podrá ser punto de apoyo para el trabajo con números fraccionarios: si a = b x k, luego a/b = k.

Evidentemente hay un punto en donde estas dos divisiones se juntan: cuando el resto de la división entera es 0, pero es preciso remarcar que el recurrir a una o a otra depende del problema a resolver, como se intentará justificar más adelante.

Cabe señalar que no todas las situaciones de división “encajan” perfectamente en uno de estos dos modelos de división. Por ejemplo el problema 3 podría ser un buen candidato para el modelo de división exacta pero, en realidad, una mayor precisión en el cociente no sería interpretable en términos de nuestro sistema monetario que sólo acepta dos decimales.

Seleccionar cuál de las operaciones debe emplearse frente a un problema dado es parte de la construcción del sentido de cada una de ellas.

Cuando se habla del significado de una operación se entra en un terreno complicado. ¿Cuál es el significado de la división? ¿Qué variedad de problemas permite resolver? ¿Qué problemas no permite resolver? ¿En qué se diferencia de las otras operaciones?, etc. No se agotan fácilmente las preguntas en relación al sentido de la división.

Muchas veces se discute si el sentido es más importante o no que la cuenta. Ya hemos planteado que desde nuestro punto de vista esta oposición impide ver que en realidad el sentido de un concepto supone reconocer los problemas que el mismo permite resolver, usar las propiedades y las formas de representación adaptadas a esos problemas y dominar diferentes estrategias de cálculo que permitan abordarlos.

Es por ello que la enseñanza debería provocar la evolución del sentido de la división a partir de:
- la resolución de problemas que impliquen la división, asumiendo fundamentalmente la afirmación esbozada en los documentos previos que indican...“los problemas favorecen la construcción de nuevos aprendizajes”...”los problemas para los cuales un conocimiento es útil, dan sentido a dicho conocimiento”...
- la manipulación de escrituras y representaciones de esta operación, como así también las variaciones y cambios que pueden ocurrir en dichas representaciones. Se plantea entonces el problema de provocar la evolución desde las producciones de los alumnos hacia las escrituras y representaciones convencionales que la escuela quiere enseñar. Esto implica asumir que los conocimientos y sus representaciones no son estáticos, están en constante revisión, son modificados, perfeccionados, reelaborados a partir de los nuevos problemas que se van presentando.
- el uso y dominio del algoritmo, como consecuencia del trabajo en torno a la resolución de problemas, asumiendo la relación entre el significado de la división y su algoritmo, las propiedades que en él intervienen, las condiciones que plantea, las restricciones que presenta.

Vemos entonces que la cuestión del sentido es compleja y exige ser abordada desde un conjunto muy variado de actividades que seguramente deberán desarrollarse a lo largo de varios años en la escuela.

2.1 Problemas vinculados a la búsqueda de cociente y resto (la relación a = b x q + r).

La relación a = b x q + r es utilizada en variadas situaciones donde, como ya fue mencionado, la necesidad de apelar a ella está determinada por el problema a resolver. Plantearemos dos tipos de problemas: repartos e iteraciones.

a) Repartos

Los primeros significados que los alumnos comienzan a otorgarle a la división se desarrollan en el transcurso del primer ciclo de la escuela primaria. Generalmente están vinculados al acto de **repartir.** Por ejemplo:

1) "Se quieren repartir 20 globos entre 6 chicos, de manera que a todos les toque la misma cantidad. ¿Cuántos globos le corresponden a cada chico?"

Son numerosos los ejemplos de problemas que se encuentran en libros y manuales donde la acción principal es el reparto y la determinación del **valor de cada parte** (¿cuántos globos le corresponden a cada chico?).

Menos frecuente es encontrar problemas donde la acción principal también sea el reparto, pero se tenga que determinar **la cantidad de partes**, por ejemplo:

2) "Se quieren repartir 20 globos entregando 6 a cada chico. ¿Para cuántos chicos alcanza?"

Si pensamos en las acciones que evocan uno y otro problema tal vez encontremos pistas para comprender la diferencia entre ambos. Efectivamente, el primero invita a ir entregando un globo a cada chico, hasta agotar los globos y luego contar cuántos se entregaron a cada uno, en tanto que el segundo problema remite a entregar de una vez 6 a cada chico y luego contar para cuántos chicos alcanzó.

Por supuesto que llega un momento en el aprendizaje en el cual se diluyen las diferencias entre uno y otro problema, sin embargo el trabajo de los chicos será justamente establecer las semejanzas entre problemas que, en principio, son diferentes.

Es importante además tener presente que el contexto determina a priori que el cociente deba ser un número entero (ni globos ni chicos son posibles de partir). Esto condiciona la operación a seleccionar.

Muchas veces los alumnos tienen dudas al proponer respuestas para este tipo de problemas: "¿son globos o chicos?" suelen preguntar. Esto nos indica que el tratamiento de las magnitudes involucradas en un problema y su relación con el resultado, no son cuestiones sencillas para los niños.

Otro aspecto vinculado al uso de la división se identifica con problemas que pongan en juego el valor o el cálculo del resto, por ejemplo:

> *"Se quieren colocar 130 figuritas en un álbum. En cada página entran 8 figuritas. ¿Cuántas páginas se pueden llenar? ¿Cuántas figuritas más se necesitarán para completar otra página?"*

Esta segunda pregunta dentro del problema exige el cálculo del resto, la comparación de este con el total de figuritas en cada página, y en consecuencia, la determinación de las figuritas que faltan. Es aquí donde el análisis del resto juega un papel fundamental en la resolución del problema.

Presentado como un problema de reparto, los procedimientos usados por los alumnos en la realización de dicho reparto le deben garantizar la obtención del resto. A su vez se deberá considerar que el resto sea menor que el divisor, caso contrario se podría continuar con el reparto. Aquí el sentido de la división apunta a la obtención del resto, y no sólo el cociente.

Otro ejemplo podría ser:

> *"Hay 625 pasajeros para ser trasladados a un congreso en micro. En cada micro entran 45 personas. ¿Cuántos micros se necesitan?"*

Muchos niños apelarán a la división y responderán que se precisan 13 micros, sin desarrollar un análisis en torno a los 40 congresales (el resto de la división) que quedarán sin viajar.

$$\begin{array}{r|l} 625 & 45 \\ \cline{2-2} 40 & 13 \end{array}$$

O bien, en caso de saber dividir con decimales, muchos alumnos dirán que se precisan 13,8 micros, dejando de lado la necesidad de que el cociente sea entero.

Es también importante el trabajo que implique la determinación del dividendo, conocidos el divisor, el cociente y el resto, por ejemplo:

> *"Luego de repartir todos los globos a los 23 invitados a su fiesta, entregando 4 globos a cada chico, Martina se quedó con 3 globos. ¿Es posible que el paquete tuviera 100 globos?"*

También en este tipo de ejemplo a los alumnos les resulta dificultoso reconocer la posibilidad de reconstruir el dividendo a partir de la definición de división.

Uno de los procedimientos posibles es reconstruir el total de globos, y la manera de conseguirlo está vinculada a la siguiente relación

Total de globos = 23 x 4 + 3.

Otra manera de resolver el problema –aunque es poco probable que surja de los niños– es hacer la siguiente operación:

$$\begin{array}{r|l} 100 & \underline{\quad 23 \quad\quad\quad} \\ 8 & 4 \end{array}$$

Los dos procedimientos permiten contestar respecto de la posibilidad de que el paquete tenga 100 globos. En el primero, reconstruyendo el total de globos que efectivamente tiene el paquete y, en el segundo, mostrando cuántos globos le hubieran correspondido a cada niños, de haber tenido 100 globos el paquete. Es interesante señalar que es posible responder a la pregunta a partir de informaciones diferentes.

b) <u>Iteraciones</u>[8]

Ampliar el conjunto de problemas para los cuales un cierto concepto es un recurso adaptado es responsabilidad de la escuela. Esta responsabilidad exige pensar situaciones en las cuales la división sea resignificada, ampliada como concepto.

El haber interactuado con problemas de repartir no es suficiente para identificar otros problemas para los cuales la división es un recurso adecuado. Es el caso del siguiente ejemplo:

“Hoy es Domingo. ¿Qué día de la semana será dentro de 1000 días?”

¿Cuáles son las estrategias que despliegan los niños para abordar un problema como éste?

En un primer momento se debatirán en torno a si considerar el año bisiesto o no (aspecto que no incide en la resolución del problema), para luego, quizás con la intervención docente y la discusión con otros chicos, poder establecer que cada 7 días volverá a ser domingo, cada 14 días también, y en realidad, cada un múltiplo de 7 será domingo.

A partir de esto algunos ensayarán estrategias similares a ésta:

7 + 7 + 7 + 7 + 7.........hasta llegar a 1000.

La complejidad y lo aburrido de este mecanismo provocará que más de un alumno piense en sumar múltiplos de 7:

O sea, cada 700 días será domingo. Cada 140 días también, entonces:

---

8 Hemos designado iteraciones a los problemas en los que se plantea una relación de congruencia: dos números enteros son congruentes, por ejemplo módulo 4, si ambos tienen el mismo resto cuando se los divide por 4. Así, por ejemplo, 14 y 82 son congruentes módulo 4.

700 + 140 + 140 = 980, a los 980 días es domingo.

Entonces, 14 días más y otra vez es domingo, ya tenemos que dentro de 994 días (980 + 14) es domingo. Si pasan 6 días más son los 1000 días, y cae sábado.

Considerando los procedimientos anteriores, el maestro podrá plantear que 7x142+6=1000 y en consecuencia, los 1000 días equivalen a 142 semanas, y sobran 6 días. Entonces, dentro de 1000 días será sábado.

A partir de resoluciones como la descripta, el maestro podrá proponer analizar qué se ha estado buscando y ver si los cálculos realizados se pueden reemplazar por una única operación. Se busca que la división comience a transformarse en un recurso adecuado para este nuevo tipo de problemas.

Se puede notar que la resolución de este problema está relacionada con la aproximación por productos y el análisis del resto (aspectos que se desarrollarán más adelante), pero serán muy pocos los que recurran a la división aunque ya sepan “usarla”.

Otro problema podría ser el siguiente:

“Si estoy en el número 78 y desciendo dando saltos de 4 en 4, ¿cuál es el último número (mayor que 0) que digo?”.

Ante este problema, evidentemente, muchos alumnos realizarán procedimientos como el siguiente

78 - 4 = 74
74 - 4 = 70 .... etcétera.

Otros, en tanto, se darán cuenta (ya que ésa es la intención) que podrán restar 40, o restar 20 (múltiplos de 4) para economizar cálculos:

78 - 40 = 38
38 - 20 = 18
18 - 16 = 2... Luego, se llega a 2

Incorporarle a este problema la pregunta ¿Cuántos saltos se dan?, obligará a los alumnos a controlar la cantidad de saltos que están contenidos en cada resta, lo que permitirá retomar la idea de que se busca un número que al multiplicarlo por 4, se aproxime lo más posible a 78:

78 = 4 x 19 + 2, o sea 19 saltos de 4 y llego al 2.

Si bien no es esperable que de entrada los chicos reconozcan la división, tanto el análisis de los distintos procedimientos, como la necesidad de encontrar una estrategia económica cuando los números crecen, debería llevar a identificar la división como la operación que resuelve este problema. Esta identificación enriquece, para los alumnos, los significados vinculados a la división.

2.1.1 La relación a = b x q + r como objeto de reflexión

Analicemos ahora el siguiente problema:

"Al dividir un número por 13, el cociente dio 4 y el resto fue 1. ¿Cuál es el número que se dividió?"

Para resolverlo, los alumnos deberán poner en juego la relación

dividendo = cociente x divisor + resto

Proponerles a los niños buscar divisiones con un resto determinado es otro problema que les exige trabajar con la relación anterior. Acá será interesante plantear restos de, por ejemplo, dos o tres cifras, para desafiar una idea frecuente en los niños: "el resto es un número pequeño".

Otro problema podría ser:

"Buscar cuentas de dividir que tengan cociente 23 y resto 12."

En un primer momento los alumnos intentarán encontrar por ensayo y error los valores del dividendo y el divisor, tarea bastante compleja por cierto.

La intención es trabajar con la escritura a = b x q + r, ya que, para que el cociente sea 23 y resto 12 se deberá verificar que:

a = b x 23 + 12

Se trata en definitiva de encontrar a y b (dividendo y divisor).

Seguramente los alumnos no pondrán de entrada en juego la relación que queda expresada con esta escritura. Muy probablemente muchos seguirán ensayando, otorgándole un valor cualquiera a "a" y buscar el valor de "b". La idea es concluir en que si se le da cualquier valor a "b", basta hacer la cuenta para encontrar el valor de "a", por ejemplo:

Si b = 30 , luego, a = 30 x 23 + 12. Entonces a = 702
Si b = 20 , luego a = 20 x 23 + 12. Entonces a = 472
Si b = 15 , luego a = 15 x 23 + 12. Entonces a = 357

Evidentemente, a partir de esta construcción, es notorio que hay infinitas posibilidades para a y b de manera que el cociente sea 23 y el resto sea 12. En este punto resulta muy interesante analizar los posibles valores de b:

¿podrá ser 2?, ¿y 4?, ¿y 10? Este análisis incorpora la necesidad de que el resto sea menor que el divisor, por ejemplo:

¿qué ocurrirá si consideramos b = 9?

la forma que adquiere el problema será:

$$\begin{array}{r|l} a & 9 \\ \hline 12 & 23 \end{array}$$

Ante esto, es posible pensar que a = 23 x 9 + 12,

a = 219

Pero al efectuar la división entre 219 y 9 ,resulta

$$\begin{array}{r|l} 219 & 9 \\ \hline 39 & 24 \\ 3 & \end{array}$$

Estos valores no verifican las condiciones planteadas por el problema: cociente 23 y resto 12. La contradicción se provoca al no considerar que el resto debe ser menor que el divisor. Llegamos entonces a la conclusión de que b puede tomar cualquier valor mayor que 12.

2.2- Problemas vinculados a la búsqueda de un cociente (la relación a = b x k)

Ya ha sido mencionada la posibilidad de que algunos problemas remitan a la división exacta: a = b x k con a, b números enteros y k un número racional (entero, fraccionario o decimal).

Organizaremos el análisis alrededor de dos tipos de problemas: proporcionalidad y producto de medidas.

a) Proporcionalidad

La división exacta aparece como necesaria cuando, en una relación de proporcionalidad, se desea determinar el valor de algunos elementos que intervienen en una tabla, o bien, al buscar la constante de proporcionalidad, por ejemplo:

Completar la siguiente tabla:

Paquetes	3	7	
Figuritas	12		176

En este caso, se ponen en juego diferentes procedimientos, que en variadas situaciones implican la división: “si en 3 paquetes hay 12 figuritas, en 1 paquete hay 12:3=4. Luego, para encontrar la cantidad de paquetes que corresponden a 176 figuritas, el cálculo 176 : 4 = 44 paquetes es adecuado a esta situación.

Es éste un campo propicio para abordar la relación entre el producto y la división.

Otro ejemplo vinculado a esta representación sería: “En una caja hay 6 alfajores. ¿Cuántas cajas corresponden a 180 alfajores”.

En este ejemplo podría pensarse que C x 6 = 180 (donde C representa la cantidad de cajas). Al ser la división la operación inversa del producto, C = 180 : 6 . Luego C = 30 cajas.

b) Producto de medidas

Es también en este tipo de problemas donde la división exacta aparece como un recurso adecuado. Es importante retomar los problemas enunciados en el apartado de multiplicación relacionados al producto de medidas.

Analicemos algunos ejemplos:

“Encontrar todos los rectángulos cuya superficie mida 24 m^2 y sus lados sean números naturales.”

En este tipo de problemas, los alumnos podrán pensar en qué números multiplicados entre sí, dan por resultado 24:

1 x 24 = 24
2 x 12 = 24
3 x 8 = 24
......

Pero también podrán suponer un lado fijo (por ejemplo 3 m) y, vía la división, determinar el valor del otro lado (24 : 3 = 8). La relación en este tipo de problemas entre el producto y la división debe hacerse notoria. Poder determinar que si un lado mide 6 m, el otro deberá medir 4m involucra el reconocimiento de la relación 24 = 4 x 6 y su “equivalente” 24 : 6 = 4.

Dentro del mismo ejemplo, el tamaño del área en cuestión es una variable a tener presente: si en lugar de 24 m^2, presentamos un rectángulo de área 1968 m^2 y sus lados deben ser números naturales, se podría pensar en dos situaciones que exigen el uso de la división exacta, pero que a su vez resultan diferentes:

Un caso estaría determinado si se presenta la medida de uno de los lados del rectángulo, por ejemplo: superficie 1968 m^2, y uno de sus lados mide 48 m. Ante estos datos, el uso de la división exacta permite encontrar el valor del otro lado: 1968 : 48 = 41m.

Otra situación podría ser (semejante a la anteriormente descripta): *"Hallar por lo menos 6 rectángulos de área 1968 m^2".* Este planteo, dados los números en juego, en cierta forma remitirá no solo a la división entera con resto cero sino a los criterios de divisibilidad.

Muchos alumnos harán ensayo y error, por ejemplo:

1968 : 2 = 984 (rectángulo de 2 x 984)
1968 : 3 = 656 (rectángulo de 3 x 656)

Pero cuando lleguen a 5, el resultado no será un número entero.

Determinar por cuál o cuáles números es posible dividir 1968 para obtener un número entero es parte del trabajo con la división exacta y los criterios de divisibilidad.

2.2.1 Los problemas que requieren de la división exacta dan lugar a otros tipos de números

Veamos en los siguientes problemas cómo los números elegidos hacen variar la complejidad de su resolución:

1) "Una madera de 12 mts. se corta en 6 pedazos iguales. ¿Cuál es la longitud de cada tramo?"
2) "Una madera de 12 mts. se corta en 5 pedazos iguales. ¿Cuál es la longitud de cada tramo?"

El problema 1 podría ser pensado igual que cualquier problema que requiera de la división exacta:

12 : 6 = 2, pues 2 x 6 = 12

En tanto que el problema 2 también remite a la división exacta, con la dificultad siguiente:

12 : 5 = k con la condición de que k x 5 = 12

Muchos alumnos recurrirán a la división entera, dando por respuesta 2 m. Sin embargo sobra un trozo de madera.

Otros intentarán aproximar cuánto más que 2 m tendrá cada pedazo. En ese caso deberán controlar el significado de lo que obtienen (24 m., 24 cm. etcétera).

Evidentemente, el segundo problema incorpora la necesidad del uso de otro tipo de números, que no son enteros, para encontrar la respuesta apropiada: fraccionarios o decimales.

Los problemas de magnitudes continuas amplifican las posibilidades de resignificar la división y las técnicas desplegadas por los alumnos para su resolución.

Tanto el trabajo con longitudes, como áreas, o el tratamiento del tiempo, favorecen la construcción del sentido de esta operación.

2.3. De las estrategias de los alumnos a los procedimientos convencionales (¿el o los algoritmos?)

Ya hemos mencionado varios procedimientos que despliegan alumnos de primer ciclo ante problemas de reparto.

Evidentemente, en dichos problemas, los recursos de agrupamientos, sumas o restas sucesivas son válidos por dos motivos:

- son los conocimientos sobre los cuales los alumnos se podrán apoyar para encontrar la solución al problema.

- Están relacionados con la división ya que implican procedimientos anticipatorios respecto de la experiencia de efectuar el reparto y contribuyen, por lo tanto, a la construcción del sentido de esta operación.

Veamos ahora una situación en la cual se busca que los alumnos inventen diferentes maneras de encontrar un cociente y un resto:

En busca de estrategias de cálculo[9]

Materiales:
- hojas cuadriculadas (cada cuadradito representa una baldosa)
- cartulinas
- tijeras y plasticola

Primera parte:

Se divide a la clase en 6 grupos de 3 o 4 alumnos cada uno. Dos grupos serán los "embaldosadores" y los otros cuatro serán los "calculistas". El problema es el mismo para todos los grupos:

> *"Un embaldosador dispone de 1897 baldosas. Las tiene que colocar sobre un gran mural rectangular en filas de 18 baldosas cada una. ¿Cuántas filas podrá armar?"*

[9] Esta actividad se basa en una parte de una secuencia para división elaborada en el IREM de Bordeaux (1985).

Los grupos de “embaldosadores” deben armar el mural con los materiales, mientras que los “calculistas” tienen que encontrar la cantidad de filas haciendo cálculos.

En esta parte debe quedar perfectamente aclarado que todos los grupos buscan lo mismo.

Uno de los aspectos a tener presentes en este problema es el tamaño de los números. La finalidad de presentar números “grandes” es que los chicos noten las dificultades que acarrea el uso exclusivo de sumas, aunque en ocasiones igual recurren a ellas, por ejemplo:

18 + 18 + 18 + 18 +......... intentando alcanzar el 1897

Ante semejante extensión de sumas algunos recurren a sumar varias filas a la vez:

36 + 36 + 72 + 72 + 180 + 180 +....nuevamente buscan acercarse a 1897.

Esta estrategia tiene la dificultad de hacer engorroso el control de la cantidad de filas que se van construyendo. Una manera de hacerlo es anotar a cuántas filas corresponde cada uno de los términos que van sumando:

36 + 36 + 72 + 72 + 180 + 180 +...

2 + 2 + 4 + 4 + 10 + 10 +........ etcétera.

Pero también hay muchos chicos que plantean otras estrategias:

18 x 100 = 1800
18 x 120 = 2160 “es mucho”
18 x 110 = 1980 “nos pasamos”
18 x 108 = 1944
18 x 104 = 1872
18 x 106 = 1908
18 x 105 = 1890 son 105 filas y sobran 7

En cambio otros alumnos realizan los siguientes cálculos:

$$\begin{array}{r} 1897 \\ -\ \underline{1800} \\ 97 \end{array} \qquad 18 \times 100 = 1800$$

$$\qquad\qquad 18 \times 4 = 72$$

$$\begin{array}{r} 97 \\ -\ \underline{72} \\ 25 \end{array} \qquad 18$$

25 son 105 filas y sobran 7 baldosas

$$\begin{array}{r} 25 \\ - \\ \underline{18} \\ 7 \end{array}$$

A pesar de que estas dos últimas estrategias podrían parecerse pues recurren a la multiplicación, tienen una diferencia que vale la pena destacar: en el primer caso los chicos buscan un número (la cantidad de filas) que al multiplicarlo por 18 se aproxime lo más posible a 1897, en cierta forma azarosa. En cambio, en el segundo caso, los alumnos van controlando mediante la resta la cantidad de baldosas que les van quedando. Esto demuestra un control sobre el total y las cantidades parciales que van usando y encontrando.

Estos procedimientos vinculados a la aproximación por productos son válidos por lo siguiente:

- responden a conocimientos que los chicos tienen
- economizan la tarea en comparación con la suma
- permiten controlar los resultados parciales que se van obteniendo
- son el punto de apoyo hacia el algoritmo convencional

Evidentemente, para que sea posible que este tipo de procedimientos aparezcan debe desarrollarse un trabajo en torno al repertorio multiplicativo tal como se describe en el capítulo de multiplicación.

Desde nuestro punto de vista, la importancia de la aproximación por productos como recurso justifica que se dediquen varias clases para asegurar que todos los alumnos dispongan del mismo.

Segunda Parte:

Un representante de cada grupo “calculista” expondrá la manera en que han resuelto el problema. La idea de esta parte es que los alumnos presenten a sus compañeros los cálculos o dibujos realizados y los convenzan de que son correctos. Lo que se pone en discusión en esta parte son las estrategias: ¿cuál es más económica?, ¿cuál permite controlar mejor lo que se va haciendo?, ¿cómo organizar los cálculos de manera que resulten comprensibles para otros?, etcétera.

Durante la resolución del problema los chicos no se preocupan por la organización de sus cálculos. Basta con que sea claro para ellos. En el momento de explicar a otro lo que hicieron se encuentran ante la dificultad de la comunicabilidad de sus estrategias. Este es un aspecto muy importante de la segunda parte.

A su vez, los dos grupos que tuvieron que construir el mural serán los controladores de lo que han producido los grupos, ya que ellos tendrán el mural armado.

Mediante la presentación de problemas como éste se busca instalar entre los alumnos un debate en torno a la solución más económica.

El recurso de multiplicar y restar deberá ser el centro de atención ya que es un procedimiento posible de ser reconocido por los alumnos como la herramienta ideal, a esta altura del trabajo.

Todos estos recursos permitirán a los niños resolver una amplia variedad de problemas relacionados con la división. Al ampliar el campo de uso de este concepto, muchos de estos procedimientos empiezan a ser defectuosos, engorrosos y poco económicos.

Será entonces necesario ofrecerles a los alumnos situaciones que favorezcan el desarrollo de nuevas y más elaboradas técnicas de cálculo de cocientes, restos, divisores o dividendos.

Es por ello que el trabajo con el algoritmo requerirá un abordaje específico que no ponga en riesgo la dinámica propia de la construcción y evolución del concepto por parte de los alumnos. Se debe pensar en una estrategia de enseñanza que permita a los alumnos construir el sentido de esta operación, aceptando que el mismo estará en constante evolución a medida que se vayan presentando la variedad de problemas que permite resolver.

Son variadas las actividades que se pueden desplegar de manera tal que los alumnos analicen sus propias estrategias, y puedan hacerlas evolucionar:

Un recurso que resulta muy útil para el cálculo de la división mediante la aproximación por productos, es el dominio de resultados y cálculos de la forma x10, x100, x1000, y consecuentemente, x20, x300, x4000. Serán de suma utilidad para los chicos en un problema como el de las baldosas (planteado anteriormente), si los números que intervienen son aún mayores*: "Se tienen 42304 baldosas. Se colocan 234 en cada fila. ¿Cuántas filas tendrá el patio?"* En este caso, procedimientos vinculados a la aproximación por productos desarrolla anticipaciones en torno a la cantidad de filas:

"si hay 100 filas, son 234 x 100 = 23400 baldosas

$$\begin{array}{r} 42304 \\ - \\ \underline{23400} \\ 18904 \end{array}$$

me quedan 18904 baldosas

"si hago 50 filas son 234 x 50 = 11700 baldosas

$$\begin{array}{r} 18904 \\ - \\ \underline{11700} \\ 7204 \end{array}$$

me quedan 7204 baldosas

"si hago 30 filas, son 234 x 30 = 7020 baldosas

7204
\-
7020
184

Ya no se pueden hacer más. Luego son 180 filas y sobran 184 baldosas.

a) <u>Estimación de la cantidad de cifras del cociente</u>

Este aspecto resulta muy útil en el momento de realizar la operación para poder controlar el resultado. Tanto al realizar el cálculo con un procedimiento no convencional, como al realizarlo usando el algoritmo, o bien con una calculadora, la posibilidad de estimar la cantidad de cifras de una división es un recurso que permite una mayor facilidad en el control de la acción realizada. Si se trata, por ejemplo, de realizar

45 678 : 342

puede estimarse la cantidad de cifras del cociente de la siguiente manera:

el cociente, ¿es mayor que 10? Sí, porque 342 x 10 = 3420 que es menor que el dividendo;

el cociente, ¿es mayor que 100? Sí, porque 342 x 100 es igual a 34200 que es menor que el dividendo;

el cociente, ¿es mayor que 1000? No, porque 342 x 1000 es 342 000 que es mayor que el dividendo.

Resulta entonces que el cociente es mayor que 100 y menor que 1000. Por lo tanto tiene 3 cifras.

b) <u>Representaciones del algoritmo</u>

A partir de este tipo de análisis es que será menos "mágica" la significación del algoritmo, respetando esos mismos procedimientos, como por ejemplo bajo una representación como la siguiente para el cálculo de

1243 : 8 =

1243	8	443	8	43	8
-800	100	-400	50	40	5
443		43		3	

Luego, el resultado será 100 + 50 + 5 = 155 y sobran 3.

O bien mediante esta otra representación para 8273 : 24

8273	24		8273	24
-2400	100	ó	-7200	300
5873	100		1073	40
-2400			-960	
3473	100		113	4
-2400			-96	
1073	20		17	344
-480				
593	20			
-480				
113	4			
-96				
17	344			

Esta es una forma posible de tratar el algoritmo de la división, que podrá servir como punto de apoyo del algoritmo convencional, pero simultáneamente se deberán desarrollar actividades tendientes a significar todos lo números que intervienen en una división, como así también las propiedades que entran en juego.

Una discusión que se ha venido desarrollando en las escuelas está vinculada a la siguiente pregunta: ¿en qué momento los alumnos "deben" dejar de explicitar la resta en el algoritmo convencional? Ahora bien, en tanto el niño necesite explicitar el significado de todos los pasos que va desarrollando, no hay motivos suficientes que justifiquen bloquearle la posibilidad de expresar esa estrategia escrita. Dejar de hacer la resta no significa un avance notorio en la concepción de esta operación ni aporta una economía tanto mayor.

El trabajo con el algoritmo no es separado del trabajo con respecto al sentido de la división. Son simultáneos y complementarios. Esto permitirá que los alumnos identifiquen a esta operación con su representación y con los problemas que permite resolver.

Hemos presentado en este apartado un campo de situaciones problemáticas sobre los sentidos de la división para ser abordados en el segundo ciclo.

Nos hemos preocupado por incluir tanto problemas contextualizados como problemas que permiten una reflexión más directa sobre el objeto matemático mismo.

La distinción entre división exacta y división entera se vincula al funcionamiento de la división en distintas clases de problemas, en distintos campos numéricos y en función de sus relaciones con la multiplicación.

III - Las fracciones, esos objetos complejos

1. Los sentidos de las fracciones

Cuando los niños comienzan a abordar el estudio sistemático de las fracciones en la escuela, tienen ya una amplia experiencia con los números naturales. Esa experiencia será para ellos el punto de apoyo a partir del cual extenderán progresivamente el campo numérico, pero al mismo tiempo se constituirá en el mayor obstáculo frente al desafío de comprender el funcionamiento de estos nuevos números. ¿Qué nos lleva a hacer una afirmación tan drástica? El aprendizaje de los números racionales[10] –escritos en forma decimal o fraccionaria– supone una ruptura fundamental con lo que el niño sabe hasta el momento: los números ya no tienen siguiente, la multiplicación no puede –salvo cuando se multiplica un natural por una fracción– ser interpretada como una adición reiterada, en muchos casos el producto de dos números es menor que cada uno de los factores, el resultado de una división puede ser mayor que el dividendo, un número –la fracción– se representa a través de dos números naturales. En fin, un edificio de certezas construido durante años, parece derrumbarse.

Por otra parte, como ocurre con cualquier concepto matemático, al pensar en las fracciones se pueden evocar múltiples puntos de vista. La fracción :

- puede ser el resultado de una medición y, por lo tanto remitirnos a establecer una relación con la unidad,

¿Cuánto mide la parte sombreada, si el rectángulo mide 1?

- puede ser el resultado de un reparto

Se tienen cinco chocolates para repartir en partes iguales entre tres chicos, ¿cuántos chocolates le corresponderá a cada chico?

- puede expresar una constante de proporcionalidad

He confeccionado un plano de mi casa en el que 2 cm representan 3 m de mi casa. Mi cocina es un rectángulo de 4m de largo por 5 m. ¿Cómo la representaré en mi plano? ¿Cuáles son las dimensiones del galpón que en el plano queda representado por un rectángulo de 5 cm por 10 cm?

- puede ser la manera de indicar la relación entre las partes que forman un todo

[10] Todo número que puede expresarse como el cociente de dos números enteros (con el divisor distinto de cero) es un número racional. Para anotar este número puede usarse la forma fraccionaria o decimal.

Para hacer naranjada, mezclé 2 cucharadas de jugo concentrado con 5 vasos de agua. Ahora quiero hacer menos jugo, pero conservando el mismo gusto. ¿Cómo podré prepararlo? ¿Y si quiero hacer más jugo?

- puede expresar el porcentaje de una población, la probabilidad de un suceso, la densidad de un material, etcétera.

¿Qué tienen en común las situaciones evocadas que todas se encuadran en el estudio de las fracciones? ¿Cómo lograr que los alumnos lleguen a establecer que en todos los casos la solución del problema planteado implica –aunque las estrategias utilizadas sean muy diversas– un cociente entre números naturales? Evidentemente, el aprendizaje de los números racionales atraviesa muchos años de la escolaridad y habría que pensar en garantizar que el concepto "crezca" (en complejidad, en sentidos posibles, en formas de representación) a medida que los niños avanzan en su paso por la escuela.

¿Qué queremos decir con esto? Por un lado, no pueden trabajarse todos los sentidos de los números racionales al mismo tiempo, por otra parte, un único sentido –por ejemplo el número racional como recurso para medir– supone problemas de diferentes grados de complejidad y, en consecuencia, habrá que plantearse el problema didáctico de hacer evolucionar esa complejidad. Vayamos recorriendo distintos sentidos posibles.

1.1 Las fracciones y la medición

Los números naturales –esas abstracciones del proceso de contar colecciones finitas de objetos– resultan insuficientes cuando nos enfrentamos con la necesidad de medir magnitudes continuas. En otras palabras, el proceso de medir no siempre es reductible al proceso de contar.

Como sabemos, medir es comparar con una unidad elegida arbitrariamente (kilogramo, metro, milímetro, hora, minuto, etc.) a la que le asignamos el número 1. El proceso de medir consiste entonces en contar cuántas veces está contenida la unidad en el objeto que queremos medir. Sin embargo, la cantidad a medir no siempre contiene un número entero de veces a la unidad. En ese caso existen dos posibilidades:

- considerar como unidad alguna subdivisión de la unidad original

- inventar números que den cuenta de todas las medidas manteniendo la unidad original.

La primera opción resuelve el problema sólo parcialmente ya que, por una parte, obliga a cambiar de unidad y, por otra, lo más probable es que no encontremos inmediatamente una subunidad adecuada, es decir que esté contenida un número entero de veces en el objeto a medir. A esto se agrega que –en la medida en que la subunidad apropiada depende del objeto a medir– deberíamos repetir el proceso de búsqueda en caso de tener que medir diferentes objetos.

Además puede suceder –tal vez sea lo más probable– que esta subunidad no exista.

Los números que dan cuenta de todas las medidas posibles de las magnitudes continuas se llaman números reales y su estudio se plantea al finalizar el tercer ciclo de la EGB[11].

Para abordar esta complejidad recordemos que los números racionales permiten expresar cualquier subdivisión de la unidad original:

> Si m y n son números naturales y m es distinto de cero, la fracción 1/n es una medida tal que n veces 1/n es igual a la unidad. Una cantidad que contiene m veces la medida 1/n se designa con el número m/n.

La posibilidad de encontrar números que expresen cualquier subdivisión de la unidad, junto con el hecho de que mediante estas subdivisiones es posible aproximarse tanto como se quiera a la medida en cuestión, hace que los números racionales resulten suficientes para resolver en la práctica los problemas de medición.

Es necesario aclarar que esta reflexión de orden teórico está orientada a que los docentes posean una mejor fundamentación de los números fraccionarios y no apunta a introducir –ni siquiera a esbozar– la existencia de los números reales en el segundo ciclo. Aceptar la provisoriedad del conocimiento es justamente tolerar que los niños se aproximen a conceptos que van a ser modificados, reorganizados y completados más adelante.

Veamos algunos problemas que ponen en juego el concepto de número racional como recurso para resolver problemas de medición a partir de subdivisiones sucesivas de la unidad.

Ejemplo 1: **Las fracciones para medir longitudes[12]**

Materiales:
- hojas de papel liso
- bandas de cartón de alrededor de 6 cm de longitud
- para ser utilizadas como unidad de longitud (una por alumno).

---

[11] Si un segmento tiene como medida un número racional, siempre existe alguna subdivisión de la unidad que entra un número entero de veces en el segmento. (Por ejemplo, si la medida de un segmento es 3/4, ¼ de la unidad entra 3 veces en el segmento; si la medida es 7/3, 1/3 de la unidad entra 7 veces en ese segmento, etc.). Cuando existe alguna subdivisión de la unidad que entra un número entero de veces en un segmento, decimos que el mismo es conmensurable con la unidad. Los pitagóricos descubrieron que si se considera como unidad el lado de un cuadrado, la medida de su diagonal no es conmensurable con el lado. Esto significa que no existe una subdivisión del lado de un cuadrado que entre un número entero de veces en su diagonal. En otras palabras, no existe una fracción que exprese la medida de la la diagonal de un cuadrado cuando se considera su lado como unidad. Para expresar las medidas de los segmentos que no son conmensurables con la unidad se inventaron los números irracionales. Los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros. La unión de los números racionales e irracionales, forma el conjunto de los números reales.

[12] Situación tomada de Douady, R y Perrin, M: Nombres Decimaux, Université de Paris 7.

Organización de la clase

La clase se organiza en una cantidad par de grupos. Cada grupo es emisor de un mensaje hacia otro grupo y receptor del mensaje enviado por este último grupo. Por ejemplo, si hay 6 equipos en la clase, la organización podría ser:

1	2
3	4
5	6

Consigna:

Cada grupo va a dibujar un segmento. El receptor debe reproducir un segmento de la misma longitud que el dibujado por el emisor. Para esto el emisor va a dar la información necesaria, sin utilizar regla graduada. El mensaje debe ser escrito y no puede contener dibujos. Si el receptor necesita informaciones suplementarias, debe pedirlas por escrito, en el mismo papel en el que se emitió el mensaje. Después emisor y receptor comparan las longitudes de sus segmentos.

Análisis de la tarea

Para cumplir con la consigna, emisor y receptor necesitan disponer de la misma unidad de longitud. La información pertinente que debe trasmitir el emisor, es entonces la medida de su segmento en función de la unidad dada.

Es necesario determinar en qué momento se va a distribuir esta banda unidad entre los grupos. Esto puede ocurrir antes o después de que cada grupo haya dibujado su segmento. Si se entrega antes, el emisor puede elegir la longitud de su segmento utilizando la unidad, por ejemplo, transportándola un número entero de veces. Su mensaje será entonces, fácil de redactar, fácil de leer y no será necesario recurrir al fraccionamiento de la unidad.

Si se da la unidad después de que los alumnos hayan dibujado el segmento que van a dictar, es muy probable que la longitud del segmento no sea un entero. Para medir el segmento será necesario fraccionar la unidad. En ese caso, tanto la redacción como la lectura de los mensajes serán más difíciles, y las fracciones serán un recurso de economía para abreviarlos.

Una variante del problema consiste en que sea el maestro quien entregue a los niños el segmento a "dictar" (además de la banda unidad). Si el docente realiza esa opción podrá controlar mejor el tipo de fraccionamientos que quiere que los alumnos movilicen cada vez que propone esta situación.

Para realizar la tarea, los niños pueden transportar la unidad –tantas veces como sea posible– sobre el segmento dibujado y enfrentar luego el trabajo de evaluar el resto. Si el resto es muy pequeño en relación con la unidad de medida o es casi igual a dicha unidad, puede ser que los alumnos lo desprecien y, en el mensaje, hagan una evaluación cualitativa del mismo ("es tres unidades y un poquitito más", "es algo menos que dos unidades").

Si el resto no es despreciable, los niños intentarán hacer una evaluación más precisa del mismo y puede ser que intenten trabajar con una subunidad de la unidad dada. En ese caso, será bastante usual que los alumnos usen la mitad, o la mitad de la mitad, de la unidad originalmente distribuida. Si el plegado en dos de la unidad original, provee una unidad muy grande, y el plegado en cuatro resulta muy pequeño, puede ser que los niños intenten plegar en tres.

Los mensajes pueden:

- ser redactados en términos de acciones más o menos ambiguas (tomen la bandita, pónganla sobre el segmento dos veces, plieguen la banda en dos y pónganla una vez más);
- dar indicaciones sobre la medida del segmento sin recurrir a la notación fraccionaria (el segmento tiene dos bandas y media);
- hacer uso de las fracciones (2 banditas + 1/2 bandita + la mitad de 1/2 bandita).

Es esperable que la primera vez que se desarrolle la actividad, los mensajes sean mayoritariamente del primer tipo. Si los segmentos de emisor y receptor no se superponen, es decir si ha habido alguna "falla" en el dictado, los equipos deben reunirse tanto para buscar las causas del desfasaje observado como para ponerse de acuerdo sobre el margen de error tolerado. Ese momento del trabajo en el que emisor y receptor vuelven sobre la tarea para intentar detectar errores, para establecer convenciones, para reelaborar los mensajes, es central para que los niños puedan tomar conciencia de los recursos útiles para resolver esta actividad. El maestro debe tener claro que, si se trata de una situación de aprendizaje, es probable que los niños no logren en el primer intento enviar mensajes "correctos". Las elaboraciones que ellos realicen al revisar las primeras producciones podrán ser puestas a prueba en una nueva vuelta del juego. De esta manera cada realización de la actividad, será una oportunidad para profundizar las relaciones que se van estableciendo y para poner en juego lo que ya se aprendió. Por otra parte, el docente aportará informaciones en relación a las escrituras que se utilizan para representar los fraccionamientos de la unidad.

Una manera de operar sobre la complejidad de la tarea, es proponer a los niños el dictado de segmentos que supongan cada vez mayores desafíos y que, a la vez, amplíen el repertorio de las fracciones que se utilizan.

Para poner en común las convenciones que se van adoptando y producir elaboraciones colectivas, se podrá organizar el envío de un mensaje a los niños de otro grado.

Este trabajo enriquece el stock de escrituras disponibles para representar medidas.

1/2 u + 1/2 u = u

1/2 de 1/4 u = 1/8 u

1/3 + 1/3 + 1/3 = u

1/2 de 1/3 u = 1/6 u

y es fuente de nuevos interrogantes:

"Con cuartos puedo armar medios, pero con tercios no puedo, ¿no?
"Para armar medio con tercios tengo que hacer un tercio más medio tercio"

A propósito de esta actividad es interesante introducir el trabajo con cálculo mental sobre las fracciones:

- ¿cuánto es la mitad de 1/4, de 1/8, de 1/6, etcétera?
- ¿cuánto es la tercera parte de 1/2, de 1/3, de 1/4?

Sabemos que una única actividad nunca es suficiente para que los alumnos aprendan algo nuevo. Es por esto que, a una situación como la propuesta, deberán seguirle otras que apunten a que los niños alcancen cierto grado de familiaridad con estos nuevos objetos con los que están interactuando. Una variante de la situación anterior podría ser, por ejemplo, entregar a los niños una banda unidad y distintas bandas para que ellos designen la medida en función de la unidad con la que están trabajando. Se podría aprovechar esta actividad para ampliar el repertorio de fracciones con las que se trabaja (1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 7/5, 8/5; 1/8, 2/8, 3/8, 9/8, 11/8, etc.). Una vez que los niños han asignado una medida a cada una de las bandas podrían poner a prueba su trabajo a través de un juego de comunicación en el que la maestra asigna una banda a cada grupito de niños y ellos tienen que mandar un mensaje para que otro grupo sepa de qué banda se trata.

Para completar esta primera aproximación es interesante proponer que los niños dibujen (o fabriquen) bandas de una medida dada (en función de la unidad con la que están trabajando). Para hacerlo, tendrán que enfrentar el problema de partir la unidad en partes iguales, tarea que resulta más o menos simple si se trata de fabricar medios o cuartos pero que se complica para tercios, quintos o séptimos.

Ejemplo 2: **Las fracciones para codificar áreas**[13]

Material utilizado:

- Hojas lisas blancas de formato A4,
- piezas recortadas de rompecabezas armados sobre hojas A4 (ver dibujo),
- sobres (uno por equipo)

Organización de la clase

Los alumnos trabajan por parejas. Cada pareja recibe dos hojas blancas y un sobre conteniendo piezas recortadas. El esquema de la página siguiente muestra las piezas que

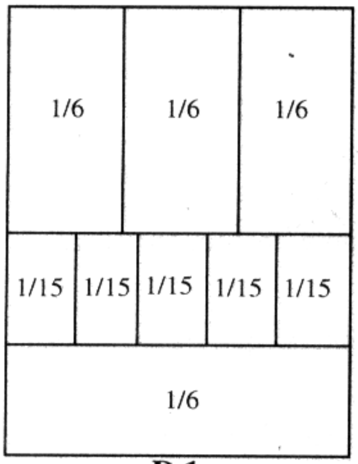
[13] La idea de utilizar rompecabezas para codificar áreas fue tomada de Douady, R. y Perrin, M,J: Nombres Decimaux, Université de Paris 7. El análisis de la actividad está también fuertemente inspirado en ese texto.

recibe cada equipo. La fracción se indica para facilitar el armado por parte del docente y no figura en el material que reciben los niños.

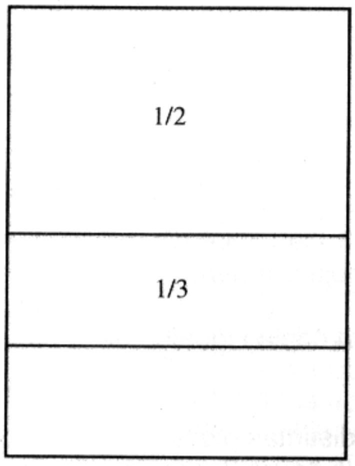
Primera parte

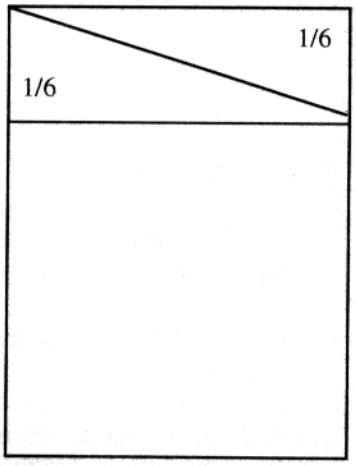
Consigna

En cada sobre hay varias piezas de papel. Son copias de piezas de diferentes rompecabezas que fueron hechos a partir de hojas como las que ustedes tienen. Yo tengo los distintos rompecabezas en el escritorio y, en la parte de atrás de cada pieza está anotada qué fracción de la hoja ocupa esa pieza. Ustedes tienen que encontrar la manera de saber qué se anotó detrás de cada pieza. Una vez que lo saben me van a decir a mí los resultados que han obtenido, si coinciden con los que yo tengo, ustedes ganan, si no, tendrán que revisar lo que hicieron y seguir buscando.

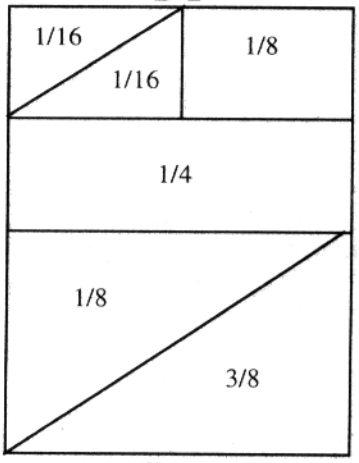


D 1

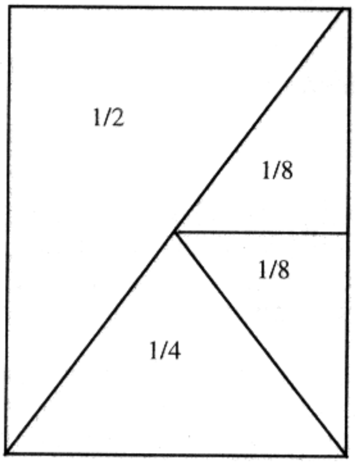


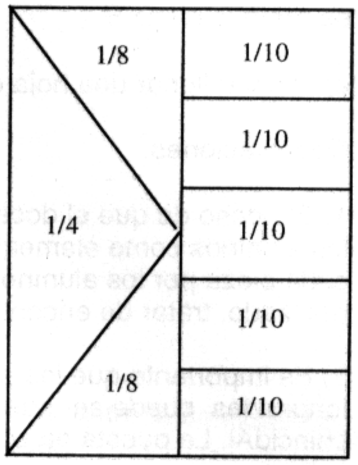


D 2

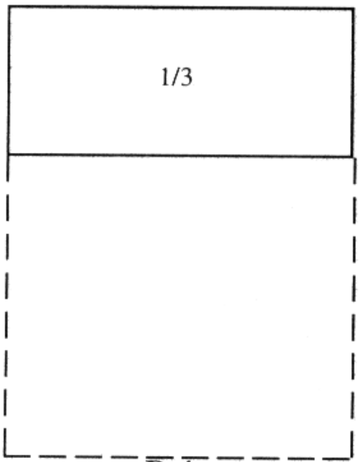


D 3

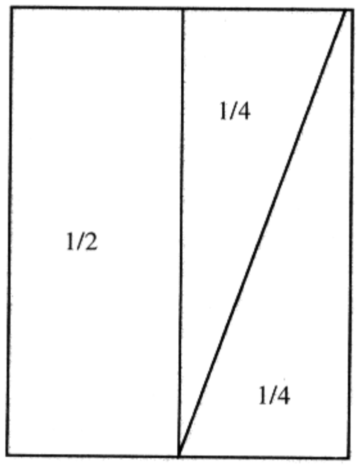




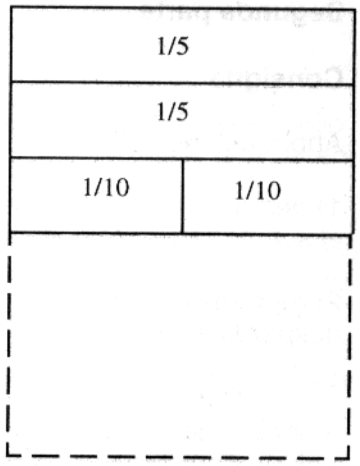
D 4

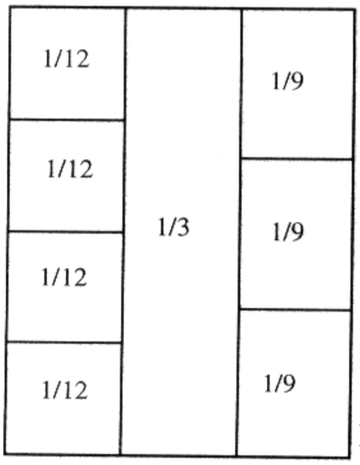


D 4

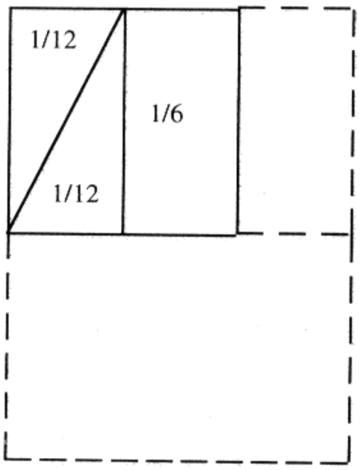


D 5





D 6



Análisis de la tarea:

A través de esta actividad los alumnos deben darse cuenta de que, para evaluar cada pieza en relación con la hoja pueden:

a) intentar "armar" una hoja con copias iguales de la pieza (observar que esto no es siempre posible)

b) establecer relaciones entre distintas piezas. Por ejemplo, no se puede armar la hoja con varias copias de la pieza B de la figura 3, pero se puede establecer que, con tres piezas A, se arma la pieza B.

c) intentar llenar una hoja con diferentes piezas.

Observaciones:

1) El hecho de que el docente tenga las piezas codificadas en el escritorio funcionará para los alumnos como elemento de control de sus resultados. Si las medidas adjudicadas a cada pieza por los alumnos no coinciden con las del maestro, habrá que revisar el trabajo realizado, tratar de encontrar las razones del error y reiniciar la tarea.

2) Es importante que los alumnos aprendan que, a diferencia de lo que ocurre con las longitudes, puede ser que dos piezas midan lo mismo pero que al superponerlas no coincidan. La puesta en común puede ser un buen espacio para señalar esta cuestión.

Segunda parte

Consigna

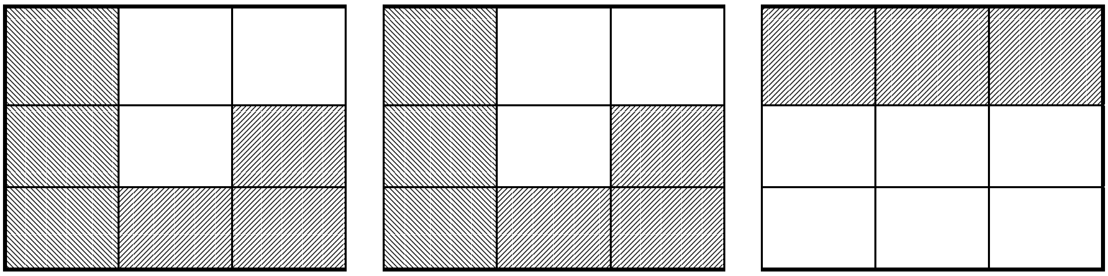
Ahora ustedes deberán:

1) pedirme la cantidad de hojas que necesitan para fabricar las piezas que les entregué en el sobre, haciendo la menor cantidad de desperdicios;

2) reproducir las piezas y evaluar la cantidad de papel utilizado y la cantidad de papel desperdiciado.

Para decir la cantidad de hojas necesarias para fabricar las piezas, los alumnos tendrán que tratar de cubrir las hojas con las piezas. (Notar que pudieron haber hecho este trabajo para evaluar cada una de las piezas.)

En este problema, las piezas están diseñadas de manera tal que la cantidad de hojas necesarias para fabricarlas es el entero superior más próximo a la suma de las medidas de las piezas. Esto no es necesariamente así para otros diseños posibles. Por ejemplo, si uno elige tres piezas como éstas.



la suma de sus medidas es 5/3, el entero superior más próximo es 2 pero, debido a la forma de las piezas es necesario utilizar tres hojas para fabricarlas.

Para evaluar la cantidad de papel utilizado para fabricar las piezas, los alumnos necesitarán sumar sus medidas. Se busca que, para obtener la suma, los alumnos reutilicen las relaciones establecidas (en la primera parte de la actividad) entre las distintas piezas, sin que resulte necesario haber enseñado previamente la reducción a común denominador.

Por ejemplo:

1/2 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1/2 + 1/3 + 1/3 o bien

1/2 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1 + 1/6

1/8 + 1/8 + 1/4 = 1/2

1/10 + 1/10+ 1/10+ 1/10 + 1/10 = 1/2

1/12 + 1/12 = 1/6

Para evaluar los desperdicios, hay que hacer la diferencia entre la cantidad de hojas utilizadas y la cantidad de papel empleado para fabricar las piezas.

Por ejemplo, para el caso de la figura 2, se puede hacer el siguiente cálculo:

1/2 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 1 + 1/6 = 2 - 5/6

El rompecabezas puede servir de referencia para reducir el cálculo a aquello que "pasa" de un número entero. Por ejemplo, para el caso 5, se puede evaluar que faltan dos bandas de 1/5 para completar la segunda hoja.

Explotar numéricamente las relaciones que se pueden establecer para cada uno de los rompecabezas contribuye a difundir para toda la clase los resultados de cada uno de los grupos.

Esta actividad apunta a poner en funcionamiento la suma de fracciones –para el contexto particular en el que las mismas representan áreas– antes de proponer un algoritmo general para sumar fracciones.

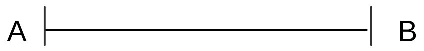
Cabe preguntarse si vale la pena invertir tiempo en estas relaciones que ni siquiera son generalizables para obtener el resultado de cualquier suma. ¿No sería más económico enseñar directamente el algoritmo convencional?

Ya hemos dado nuestro punto de vista al respecto: las relaciones que los chicos elaboran a partir de su interacción con un problema como el del ejemplo, aún cuando ellas mismas se olviden, dan lugar a un vínculo con la matemática a partir del cual los alumnos pueden controlar mejor los resultados de sus decisiones.

Evidentemente, ofrecer esta posibilidad es encontrar el espacio en el cual la enseñanza de la matemática contribuye a la formación de la autonomía intelectual del niño.

Ejemplo 3**: Reconstruir la unidad**

Dibujar el segmento unidad sabiendo que el segmento AB mide 2/5. Encontrar una manera de probar que el resultado es correcto.



Este problema resulta complejo para los chicos ya que les exige enfrentar el problema inverso al que están normalmente habituados. El error más frecuente que cometen los niños es intentar resolver el problema dividiendo el segmento AB en 5 partes iguales, lo cual da cuenta de que están interpretando el problema como si se tratara de representar la fracción 2/5, dada la unidad.

Resulta interesante permitir que los niños desplieguen esta estrategia equivocada y que se confronten a ella en el momento de validar su resultado. La contradicción entre el resultado obtenido (la unidad va a ser menor que 2/5 de la unidad) y los conocimientos que los niños ya poseen en relación a fracciones, será el filo sobre el que el docente podrá operar para orientar el debate y la búsqueda de la solución correcta.

Observemos que a partir de este problema se pueden identificar estrategias para reconstruir la unidad a partir de una fracción dada.

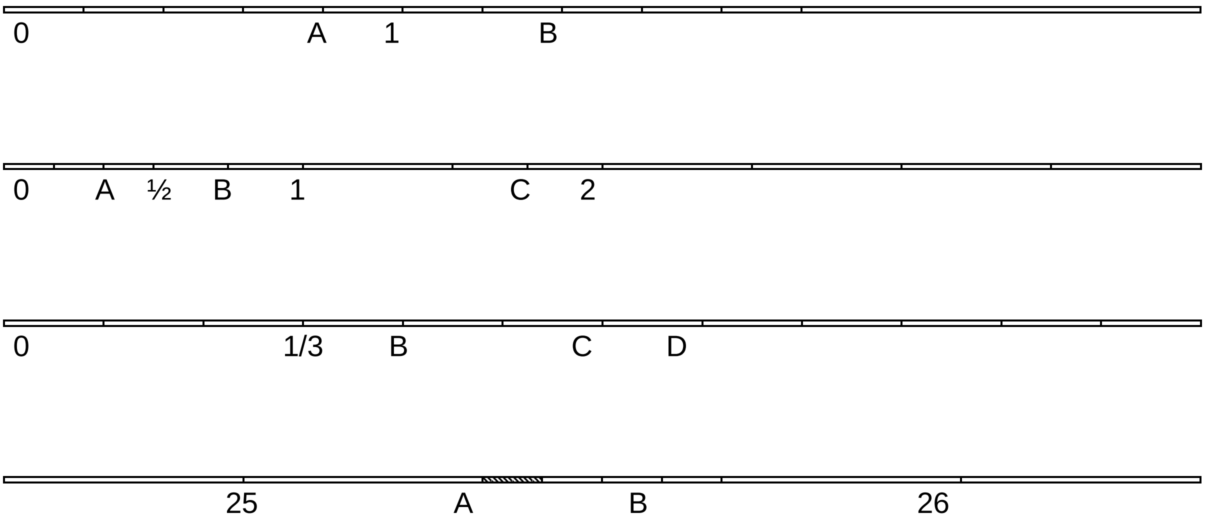
<u>Representación de números en la recta</u>

El trabajo de representación de números fraccionarios en la recta ofrece la posibilidad de poner en juego las relaciones aprendidas y de tratar con los números desvinculados de los contextos particulares en los que funcionaron. Nuevamente, los problemas que se pueden plantear alrededor de esta cuestión pueden ir creciendo en complejidad a medida que los niños avanzan en su escolaridad.

La tarea de representar algunas fracciones sobre un eje supondrá para los niños la puesta en juego de diferentes conocimientos según sean las fracciones:

- de igual o de distinto denominador,
- todas menores que 1 o algunas mayores que 1 y otras menores,
- próximas o alejadas (no es lo mismo representar 3/5, 8/3 y 3/2 que 1/3, 27/4 y 209/12).

Los conocimientos que es necesario invertir para establecer cuál es el número correspondiente a una cierta posición en la recta también pueden ser muy diversos de una actividad a otra. Analicemos, por ejemplo, estas situaciones en las que, en todos los casos, hay que establecer cuáles son los números que corresponden a las letras.



El lector reconocerá en la primera situación un ejercicio que se plantea habitualmente: la unidad está representada en la recta, y además está dividida en partes iguales; por esta razón la utilización de la definición para ubicar a qué números corresponden las posiciones A y B, es bastante directa.

En la segunda representación, en cambio, el hecho de que la unidad no esté partida en partes iguales hace que el problema resulte más difícil: por ejemplo, para ubicar el punto A, es necesario establecer que la tercera parte de un medio es un sexto y luego asignar dos sextos a esa posición. La posición del punto B, en cambio, es ¾ aunque la unidad no esté partida en cuatro partes iguales. Las relaciones establecidas para asignar un número a la posición B, deben reutilizarse para ubicar una fracción entre 1 y 2.

Para el tercer caso es necesario establecer que cada una de las partes en las que está dividida la recta equivale a 1/9 de la unidad (un tercio de un tercio) y a partir de ahí, colocar los números correspondientes a cada una de las letras.

Finalmente, en el cuarto caso hay que determinar que la distancia entre 25 y A es un tercio y que la zona sombreada equivale a un doceavo de unidad.

Los problemas anteriores no están pensados para plantearlos todos en el mismo momento, ni siquiera en el mismo año escolar (aunque sí en el segundo ciclo). Simplemente pretendemos mostrar que la cuestión de la representación gráfica puede constituirse en una excelente oportunidad para reflexionar sobre la naturaleza de los números que los niños están intentando aprender.

Cualquiera de los problemas anteriores puede enriquecerse si se les pide a los chicos que representen ellos mismos números a partir de cierta información. Por ejemplo, presentar una recta en la que están marcados el ½ y el ¾ y pedirles que representen el cero y el uno.

A propósito de las pizzas y las tortas

Es usual que la escuela adopte el modelo de partir pizzas y tortas para "presentar" el concepto de fracción. Tan natural resulta esta opción que muchas veces el modelo suele confundirse con el concepto mismo, sin que se tenga demasiada conciencia de la cantidad de puntos de vista vinculados al concepto de fracción que quedan afuera del esquema "partir un todo en partes iguales". ¿Qué queremos decir con esto?

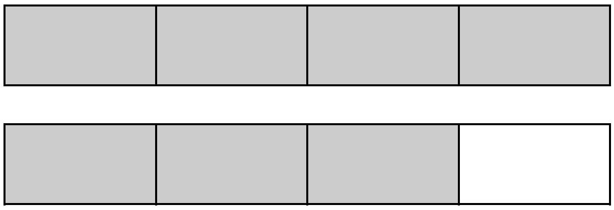
En primer lugar, es frecuente, ante la tarea de decidir si, por ejemplo, la parte rayada del siguiente dibujo representa 1/3 de la unidad, los niños contestan que no "porque no está partida en partes iguales". El problema de evaluar una medida se reduce entonces a una cuestión de percepción que no pone en juego el concepto de fracción.

Este ejemplo muestra algunos inconvenientes que surgen al identificar el concepto de fracción con la subdivisión real del todo en partes iguales.

Estos inconvenientes se ponen también de manifiesto frente a la tarea de medir un objeto mayor que una unidad. Una vez, un niño nos ha dicho que las fracciones mayores que uno son impropias "porque es inapropiado partir más de lo que se tiene".

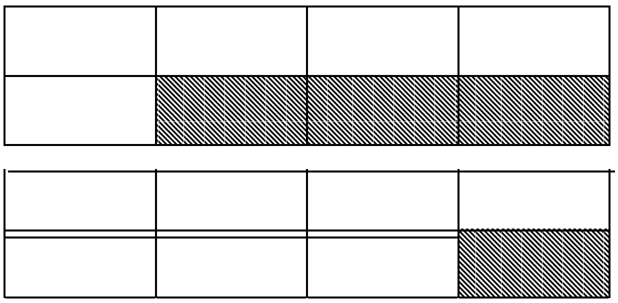
Para evaluar qué parte de este entero

está rayada en el siguiente caso



suele ocurrir que los niños respondan 7/8 en lugar de 7/4. Podemos interpretar que, implícitamente, ellos están considerando "los dos enteros" como unidad y, podemos analizar también que dicha interpretación es razonable cuando se piensa que la fracción es el resultado de partir un todo en partes iguales.

Problemas similares surgen cuando los niños se ven enfrentados al problema de evaluar una suma usando el modelo de “un todo partido en partes iguales”. Es frecuente que para sumar, por ejemplo, 5/8 más 7/8 con esta representación



los niños interpreten que el resultado es 12/16, ya que, nuevamente, consideran como unidad la superficie de los dos rectángulos. El punto de vista de los niños “justificaría” el error –tan frecuente– de sumar por separado los numeradores y los denominadores.[14]

Nos interesa explicitar que las consideraciones anteriores no intentan ser una prédica contra el recurso de utilizar tortas y pizzas para enseñar fracciones; apuntan más bien, a identificar cuáles son los aspectos que esta presentación no aborda y, por lo tanto, a señalar las limitaciones que surgen cuando se la concibe como primer, único y excluyente modelo para la enseñanza de las fracciones.

1.2 - Las fracciones un recurso para repartir

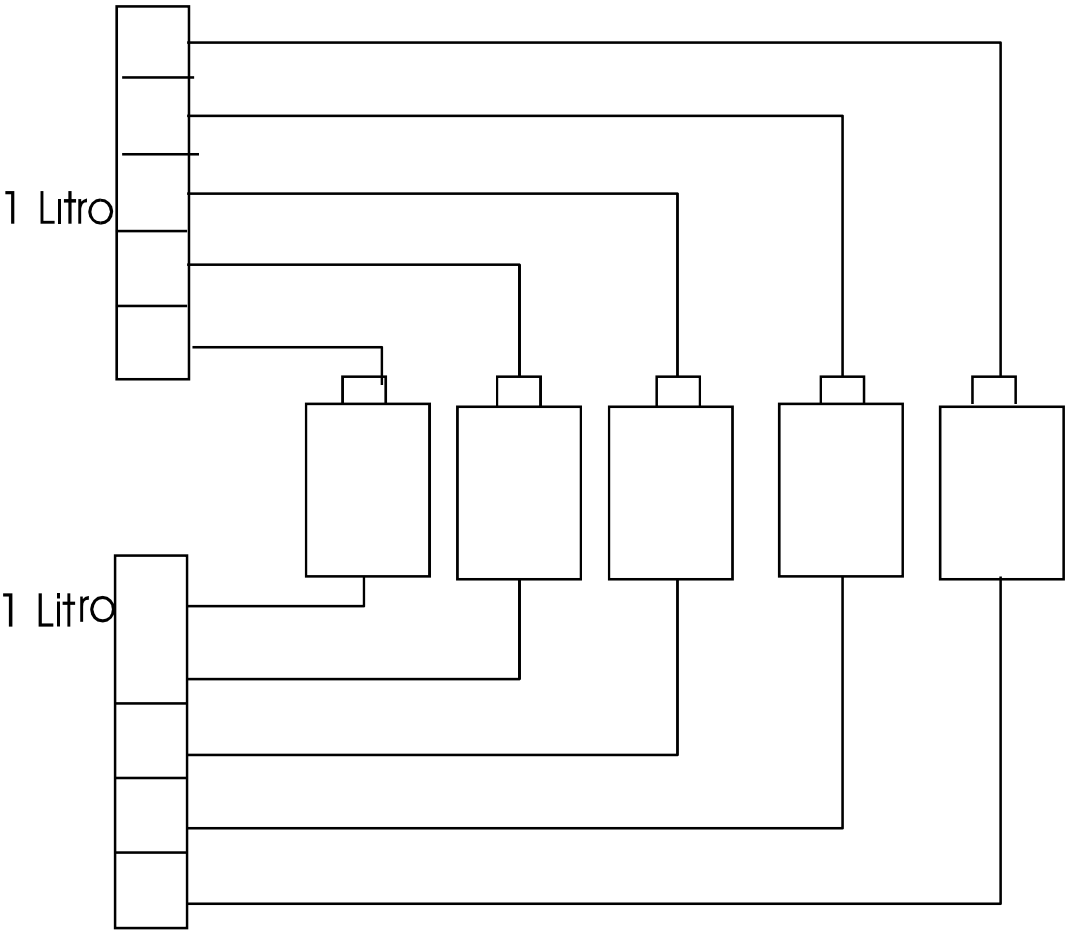
Ya hemos visto que el problema de repartir, por ejemplo, 9 objetos entre 4 personas, puede tener distintas respuestas según la calidad de los objetos con los que estemos tratando.

Supongamos, por ejemplo, que se trata de repartir, en partes iguales, 37 litros de aceite entre 5 bidones. Es fácil –a una cierta altura del aprendizaje– establecer que si se colocan 7 litros en cada bidón, sobran 2 litros:

37 litros	5 bidones
2 litros	7 litros por bidón

los 2 litros que todavía no se repartieron pueden distribuirse entre los 5 bidones. El problema ahora consiste en dividir 2 litros entre 5. Una estrategia posible, bastante usual entre los niños es

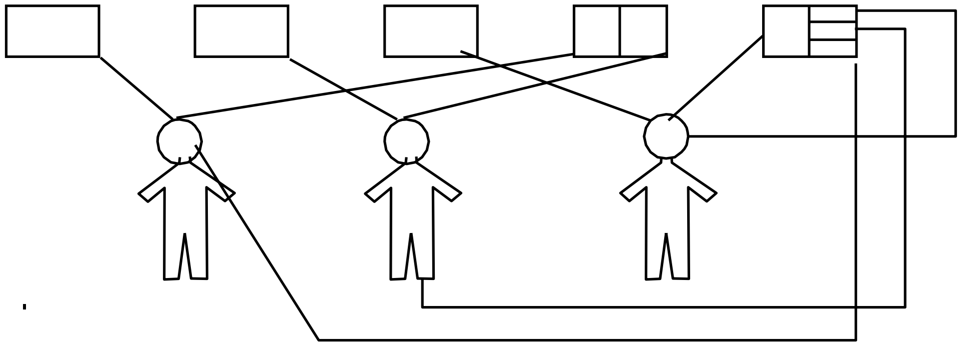
[14] Este ejemplo ha sido tomado del libro “El aprendizaje de las matemáticas” de Dickson,L; Brown,M y Gibson,O, Editorial Labor, 1991.



Es decir que, 37 : 5 $\longrightarrow$ 7 + 2/5 = 37/5.

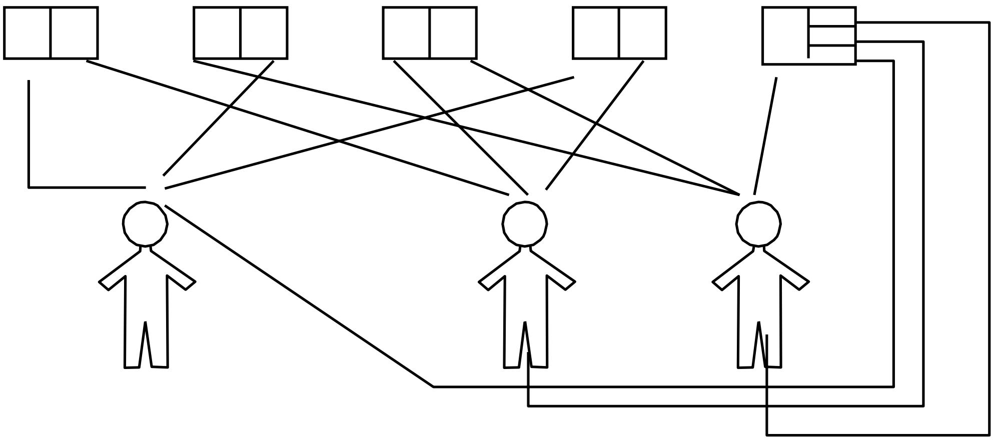
Hemos observado que, al trabajar una situación de este tipo con los niños –alrededor de quinto grado– ellos suelen sorprenderse cuando el maestro señala que numerador y denominador del cociente coinciden con dividendo y divisor de la cuenta. –”¿Será casualidad, o pasa con cualquier cuenta?” – nos preguntó alguna vez un chico. En realidad la respuesta a esta pregunta supone la conceptualización de la fracción como cociente de números naturales. La sorpresa de los niños nos da la pauta de que esta conceptualización no es espontánea ni se realiza inmediatamente a partir de las situaciones de medida. Supone, por lo tanto, situaciones específicas que la pongan en el centro de las discusiones con los alumnos.

Las situaciones de reparto -que pueden plantearse desde el comienzo del estudio de las fracciones en cuarto grado- contribuyen a la conceptualización de la fracción como cociente de naturales siempre que se explicite que el resultado del reparto es el resultado de un cociente. Por otra parte, estas situaciones suelen ser una buena oportunidad para que los niños desplieguen sus propias estrategias y establezcan relaciones que enriquezcan la conceptualización. ¿Qué queremos decir? Frente al problema –por ejemplo– de repartir en porciones iguales 5 chocolates entre 3 niños, es usual que se pongan en juego algunas de las siguientes estrategias:

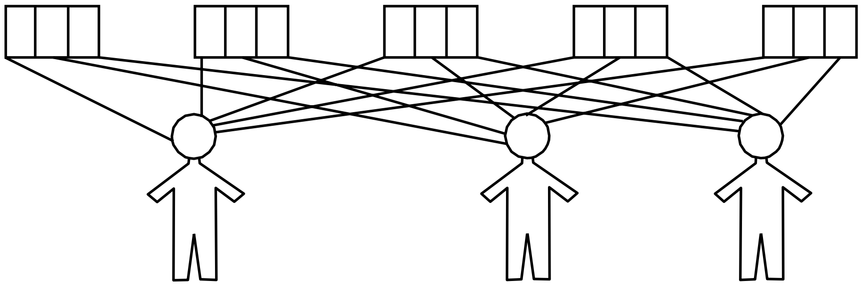


A cada chico le corresponde 1 chocolate + ½ chocolate + 1/6 chocolate

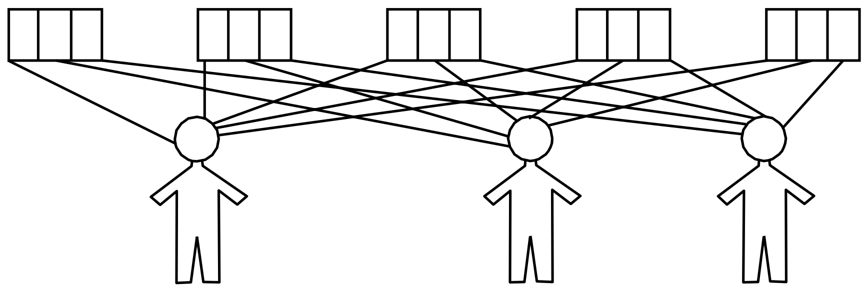
Dejando de lado las dificultades –nada despreciables por cierto– que supone partir una mitad en tres partes, es interesante discutir con los niños cómo saber a qué fracción equivale la tercera parte de un medio. Se espera que los alumnos puedan establecer que se necesitan seis de esos “pedacitos” (tercios de medio) para reconstruir el chocolate y que puedan deducir en consecuencia, que un tercio de un medio es un sexto.



A cada chico le corresponde 3/2 chocolate + 1/6 chocolate



A cada chico le corresponde 5/3 de chocolate



A cada chico le corresponde 1 chocolate + 2/3 de chocolate

A partir de este despliegue de procedimientos será necesario establecer la equivalencia de cada uno de los resultados. Es decir, habrá que justificar por qué

1 + ½ + 1/6 = 3/2 + 1/6 = 5/3 = 1+ 2/3

Argumentos del tipo

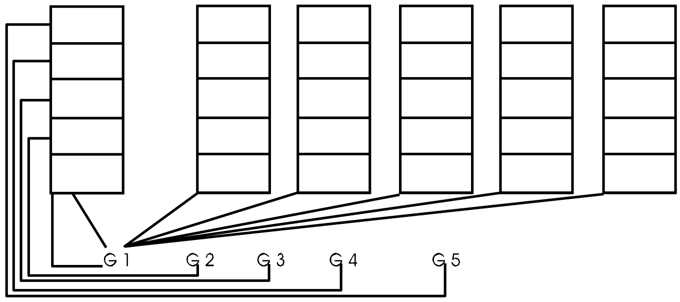
“Uno son dos mitades, entonces uno más un medio es lo mismo que tres medios”;
“Uno son tres tercios, tres tercios más dos tercios son cinco tercios”;

“Si cada mitad se parte en tres, hay tres sextos, entonces 3 mitades es lo mismo que 9 sextos, 9 sextos más un sexto son diez sextos y diez sextos es lo mismo que cinco tercios”; permiten trabajar la noción de equivalencia como respuesta a un problema planteado, aún antes de recurrir al algoritmo de obtención de fracciones equivalentes (si se multiplican numerador y denominador por un mismo número, se obtiene una fracción equivalente a la dada).

El planteo de este problema con otros números (4 para repartir entre 3, 8 para repartir entre 5, etc.) enriquecerá el trabajo con equivalencias al tiempo que se podrá constituir en referencia para abordar otras cuestiones:

¿en qué casos se obtiene como resultado un número mayor que 1? ¿y menor que 1? ¿cuándo se obtiene una porción mayor para cada chico, cuando se reparten dos chocolates entre tres chicos o cuando se reparten cuatro entre seis? ¿qué es más, ¾ (resultado de repartir tres entre cuatro) o 2/3 (resultado de repartir dos entre tres)?

A partir de haber hecho funcionar las fracciones como números que expresan el resultado de un reparto, es posible analizar por qué la fracción puede pensarse como un cociente entre números naturales. ¿Cómo pensarlo? Si se trata, por ejemplo, de repartir 6 objetos (fraccionables) en 5 grupos, se puede proceder partiendo en 5 partes iguales cada objeto



y luego integrar los grupos con una parte de cada objeto

5 veces 6/5 es igual a 6

Si pensamos que este mismo procedimiento puede generalizarse para cantidades cualesquiera, podremos establecer que una fracción a/b es el cociente entre un natural a y otro b. En realidad la idea de cociente está implícita en la idea de medida ya que medir es preguntarse cuántas veces cabe la unidad en el objeto a medir, y esta pregunta remite a la noción de cociente. Sin embargo, esta relaciones entre la fracción como medida y la fracción como cociente están muy lejos de ser obvias y nuestra preocupación es que los alumnos construyan, por una parte, ambas concepciones y, por otra parte, que lleguen a establecer la relación entre ambas.

Un problema matemático

Una vez que los alumnos han trabajado con decimales, se puede proponer la siguiente situación que también apunta a la conceptualización del número decimal, y por lo tanto de la fracción, como cociente de números naturales.

“Encontrar con la calculadora, cuentas de una sola operación, con números naturales, cuyo resultado sea 0.75.”

La primera reacción de los niños es decir que “no se puede”. Frente a esto el docente alienta a seguir indagando y los niños llegan a establecer que la única cuenta posible es la división. Surgen entonces las siguientes propuestas:

75: 100; 3 : 4; 6 :8, etcétera.

Habrá que analizar con los chicos, qué relación hay entre el numerador y el denominador del cociente (0.75) expresado como fracción y el dividendo y el divisor de la división que dio origen al resultado.

El hecho de que los niños hagan divisiones no significa que ellos tengan conciencia de que la única operación posible es la división. Veamos el siguiente fragmento de una clase de quinto grado en la que los niños ya habían encontrado algunas divisiones:
Maestra.—¿Por qué todos hicieron divisiones, no habrá alguna otra cuenta que puedan hacer?

(La mayoría de los niños comienza a buscar otras cuentas. Luego de un tiempo, varios niños protestan diciendo que no se puede.)
Maestra.— ¿Por qué no se puede?
Alumno 1.— Porque por ejemplo, la suma más chica es uno más uno que da dos, y 0,75 es más chico que 2.
Maestra.— Entonces busquen una suma con números naturales que dé 4,75.
Alumno 2.— Tampoco se puede porque si sumamos dos números naturales nunca nos va a dar un decimal.
Alumno 3.— Y si restamos tampoco y si multiplicamos tampoco, la única cuenta es la división.

Es interesante señalar que el argumento del Alumno 1 es insuficiente para explicar que sólo se puede responder al problema con división. El contra argumento de la maestra ayudó a los alumnos a precisar su fundamentación.

Notemos que este problema pone en juego un aspecto que no se hace evidente a través de los problemas que apuntan a resolver cuestiones prácticas: la división exacta no siempre es posible en el conjunto de los números naturales y los números racionales vienen a cubrir esta necesidad de la aritmética de dar sentido a cualquier división entre naturales (más precisamente entre enteros, siempre cuando –por supuesto– el divisor sea distinto de cero).

1.3 - Las fracciones y las relaciones de proporcionalidad directa

Las situaciones de proporcionalidad directa en las que la constante de proporcionalidad es un número racional ponen en funcionamiento un nuevo sentido para las fracciones (y decimales).

Analicemos el siguiente problema[15]

> *Para hacer naranjada, mezclé 12 vasos de jugo puro con 9 vasos de agua. Ahora quiero hacer menos naranjada, pero conservando el mismo gusto. ¿Cómo podré prepararla? ¿Y si quiero hacer más naranjada?*

Este problema pone en juego –más allá de las estrategias que los alumnos utilicen– el concepto de razón: cada 4 vasos de jugo puro se agregan 3 vasos de agua.
Analicemos la siguiente tabla:

[15] La elección de este problema está inspirada en la lectura del artículo de Jere Confrey.

Cantidad de vasos de jugo puro	4	8	12	16	20	24	28
Cantidad de vasos de agua	3	6	9	12	15	18	21

Notemos que los pares de números que se corresponden en la tabla (3/4, 6/8, 9/12, 12/16, 15/20, 18/24, 21/28) determinan fracciones equivalentes. Sin embargo, el significado de la equivalencia es bastante diferente del que los niños estudiaron a propósito de la fracción como recurso para medir.

Efectivamente, el concepto de equivalencia está asociado ahora a la conservación de la proporción y no a la conservación de la cantidad de jugo: 12 vasos de jugo puro con 9 vasos de agua permiten hacer más cantidad de naranjada que 4 vasos de jugo puro con 3 vasos de agua, pero en ambos casos la concentración de jugo, y por lo tanto el gusto, es el mismo.

Resulta interesante discutir con los niños qué sucede con el gusto de la naranjada si se agrega a una cierta mezcla, por ejemplo de 4 vasos de jugo puro con 3 vasos de agua, un vaso de jugo puro y un vaso de agua. Muchos alumnos sostendrán que de esta manera se conserva el gusto, otros en cambio, serán capaces de hacer razonamientos como el siguiente:

"Una mezcla de 4 vasos de jugo con 3 vasos de agua tiene el mismo gusto que 16 vasos de jugo con 12 de agua y una mezcla de 5 vasos de jugo con 4 de agua tiene el mismo gusto que 15 vasos de jugo con 12 de agua; 16 vasos de jugo con 12 de agua es más concentrado que 15 de jugo con 12 de agua. Por lo tanto, si se agrega una vaso de jugo puro y uno de agua no se mantiene el gusto".

4 jugo puro ⋮ 16 jugo puro

es lo mismo que

3 vasos de agua ⋮ 12 vasos de agua

$4 \xrightarrow{\text{+1 vaso de jugo puro}} 5$

$3 \xrightarrow{\text{+ 1 vaso de agua}} 4$

$\frac{5}{4}$ es lo mismo que $\frac{15}{12}$ $\qquad$ $\frac{16}{12}$ es más concentrado que $\frac{15}{12}$

Analicemos ahora las siguientes preguntas en relación al problema anterior:

Si quiero conservar el gusto, ¿cuántos vasos de agua tendré que poner para 5 vasos de jugo? ¿cuántos vasos de jugo para 8 de agua?

El trabajo con las propiedades de la proporcionalidad directa contribuirá a encontrar las respuestas para las preguntas anteriores:

: 3 x 8

X 5

:4

Cantidad de vasos de jugo puro	4	1	5	4/3	32/3 10 2/3
Cantidad de vasos de agua	3	3/4	15/4 3 ¾	1	8

:4 x 5

:3 x 8

Este ejemplo pone en evidencia el mutuo compromiso que existe entre la construcción del concepto de número racional y el de proporcionalidad directa. Para que un problema como el anterior pueda ser abordado por los alumnos, es necesario que hayan utilizado –y reflexionado sobre– las propiedades de la proporcionalidad directa. Es imprescindible además, que dominen la noción de fracción de un entero, sin la cual este trabajo resultaría muy difícil de encarar.

Notemos que el problema anterior puede ser resuelto usando al uno como "intermediario" sin necesidad de explicitar cuál es la constante de proporcionalidad. Sin embargo –lo veremos más adelante– esta explicitación será imprescindible para avanzar en la comprensión de uno de los sentidos de la multiplicación de fracciones.

Como se ha señalado más arriba, la constante de proporcionalidad expresa la relación entre vasos de jugo y vasos de agua, y queda explicitada cuando se halla el valor que se corresponde con el 1 (en el ejemplo, es ¾ y expresa la cantidad de vasos de agua por cada vaso de jugo puro). Será necesario relacionar –no es obvio para los chicos– los procedimientos que implican el uso de las propiedades de la proporcionalidad con el de multiplicar cada valor por la constante de proporcionalidad. Nuevamente, para que esta relación sea posible, los niños deberán utilizar el concepto de fracción de una cantidad.

Veamos otros ejemplos en los que las fracciones funcionan en el contexto de la proporcionalidad directa. Analicemos las siguientes tablas:

Tiempo de marcha de un caminante (en horas)	2	4	6	...
Distancia recorrida (en km)	5	10	15	...

Tiempo de marcha de un motor (en horas)	2	4	6	...
Consumo de combustible (en litros)	5	10	15	...

Medidas reales de una casa (en m)	2	4	6	...
Medidas en el plano de la casa (en cm)	5	10	15	...

En la primera situación, cada 2 horas de marcha se recorren 5 km, en la segunda, cada 2 horas de tiempo de funcionamiento de un motor se consumen 5 litros de combustible y en la tercera, cada 2 metros que se incrementa una cierta longitud en la realidad, su representación en el plano se incrementa 5 cm. Así, si bien las tres situaciones son diferentes, tienen una característica común: las cantidades que se corresponden forman razones equivalentes y esta equivalencia significa igualdad en el ritmo de crecimiento.

2- Multiplicación de fracciones

En el capítulo 1, y en relación a los números naturales, hemos analizado diferentes sentidos de la multiplicación. Hemos visto que la misma se pone en funcionamiento para obtener una medida producto de otras dos, en las relaciones de proporcionalidad directa y en los problemas de combinatoria. ¿Es posible extender dichos sentidos para la multiplicación de fracciones?

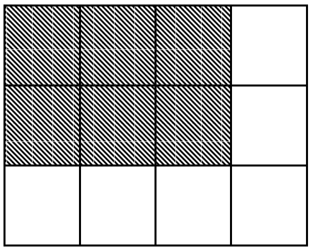
En tanto los problemas de combinatoria involucran exclusivamente números naturales, no es pertinente plantearse su extensión para las fracciones. En cambio, tanto los problemas de proporcionalidad directa como los de producto de medidas involucran, en general, magnitudes continuas. Preguntarse por la forma que adquirirán esos problemas al trabajar con números racionales es una manera de profundizar en el sentido de la multiplicación en este conjunto numérico. Esta es la cuestión que abordamos a continuación.

2.1- Producto de medidas, producto de fracciones

Supongamos que les planteamos a los alumnos el problema de hallar el área de un rectángulo cuya base mide ¾ de la unidad y cuya altura es 2/3 de la unidad. ¿Cómo podrían resolverlo?

Evidentemente, para comprender el problema es necesario que los niños estén familiarizados con el concepto de medida y que tengan alguna experiencia con el concepto de área. Esta experiencia debe contener necesariamente el haber hecho mediciones directas de áreas con diversas unidades y el haber establecido, para medidas enteras de los lados de un rectángulo, la relación entre las medidas de los lados y el área.

La pregunta planteada podría reformularse de la siguiente manera: ¿Qué parte del cuadrado unidad es el rectángulo en cuestión?



Los niños pueden establecer que cada pequeño rectángulo de ¼ por 1/3 es 1/12 de la unidad y que el rectángulo de 2/3 por ¾ es 6/12 de la unidad. Si deseamos que el producto de fracciones resulte un recurso adecuado para cuantificar el área de un rectángulo en función de las medidas de sus lados, necesitamos atribuir el valor 6/12 al producto de 2/3 x ¾.

Fue la necesidad de responder al problema del producto de medidas a través del producto de fracciones la que llevó a los matemáticos a elegir una definición de multiplicación que fuera satisfactoria desde el punto de vista lógico pero que, a la vez, preservara la utilidad de las fracciones para describir los procesos asociados a la medición.

2.2- La multiplicación de fracciones y la proporcionalidad directa

Retomemos alguno de los problemas de proporcionalidad directa que –como vimos– ponen en juego el concepto de fracción. Consideremos nuevamente la tabla que relaciona tiempo de marcha y distancia recorrida:

Tiempo de marcha de un caminante (en horas)	2	4	6	...
Distancia recorrida (en km)	5	10	15	...

Ya hemos analizado que la constante de proporcionalidad (en este caso 5/2 de kilómetro por hora) permite "pasar" de tiempo a distancia multiplicando por 5/2.

¿Qué distancia recorre el caminante en ¾ hora?

Cualquiera sea la estrategia que los alumnos movilicen para responder esta pregunta, el problema permite dar un nuevo sentido a la multiplicación de fracciones (en este ejemplo ¾ x 5/2).

Efectivamente, es probable que los niños lleguen a la solución del problema aplicando las propiedades que ellos ya han trabajado:

:2 :4 x3

Tiempo de marcha de un caminante (en horas)	2	1	¼	3/4
Distancia recorrida (en km)	5	5/2	5/2x4	5x3/2x4

:2 :4 x3

La coordinación entre el resultado obtenido a través de las propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa y el conocimiento de que cualquier valor correspondiente a un tiempo de marcha multiplicado por 5/2 da como resultado la distancia recorrida, permite establecer que

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2}$$

Seguramente será necesario que los alumnos se familiaricen con este tipo de problemas antes de tratar de establecer una regla general. Como lo hemos señalado a propósito de otras cuestiones, apurarse por establecer los mecanismos va –generalmente– en desmedro de una comprensión profunda de las leyes que los justifican.

El ejemplo que acabamos de analizar intenta mostrar que el problema de calcular el correspondiente de un valor fraccionario en una relación de proporcionalidad directa con constante fraccionaria, pone en funcionamiento la multiplicación de fracciones en un sentido diferente del de producto de medidas.

En relación con esta última cuestión quisiéramos responder una pregunta que muchas veces nos han formulado los maestros: “¿Si ya dimos multiplicación de fracciones a través de áreas, conviene darlo de esta otra manera? ¿No es más difícil?

Nuestro punto de vista es que los dos contextos muestran aspectos diferentes de la multiplicación de fracciones. Si nuestra preocupación se centra no sólo en los algoritmos sino que intenta poner en primer plano el sentido de la operación, los dos abordajes son necesarios para que los niños tengan la oportunidad de hacer una construcción más rica del significado de la multiplicación de fracciones.

Hemos tratado de trazar un recorrido por cuestiones vinculadas al concepto de fracción, intentando mostrar la complejidad que plantea su enseñanza. A pesar de nuestro intento de realizar un análisis profundo, son muchas las cuestiones que no hemos abordado, son muchas las preguntas que seguramente quedan sin responder.

En particular, no nos hemos detenido en la sistematización de la adición y la sustracción de fracciones, ni hemos analizado la problemática didáctica vinculada a la enseñanza de las expresiones decimales de los números racionales.

La opción de dejar estas cuestiones fuera de los análisis de este documento se vincula estrictamente a las limitaciones que impone necesariamente un material como el que estamos presentando. No obedece –queremos recalcarlo– a una subestimación de los problemas didácticos que plantea su enseñanza.

A modo de cierre

Los temas incluidos en este documento constituyen aspectos centrales del eje numérico en el segundo ciclo.

Además de analizar, para cada uno de ellos, el campo de problemas, las propiedades y las formas de representación, hemos querido explicitar las relaciones que se pueden establecer entre los distintos conceptos.

Así, la multiplicación y la división exacta en los números naturales constituyen una unidad de análisis en tanto operaciones inversas. Por otra parte, hemos establecido conexiones entre el estudio de las fracciones y las operaciones de multiplicación y división. En primer lugar la necesidad de dar sentido al cociente exacto entre cualquier par de números naturales permite comprender el significado matemático de ampliar el campo numérico de los naturales a los racionales. Los números racionales cobran también sentido frente al problema de resolver las cuestiones vinculadas a la medición. Finalmente es posible extender a los números racionales algunos de los sentidos que se juegan a propósito de la multiplicación de los números naturales.

Aunque somos conscientes de que no hemos abarcado toda la complejidad didáctica que subyace a estos conceptos, nos hemos propuesto contribuir a que los docentes gestionen una enseñanza que respete el sentido de los conceptos matemáticos, que atrape rasgos esenciales del quehacer matemático comunicables por la escuela, y que tenga en cuenta los procesos de construcción de conocimientos por parte de los niños. Sabemos del desafío que supone trabajar colectivamente con el objetivo de convertir las ideas aquí desarrolladas en proyectos efectivos de enseñanza. Si este material contribuye a lograrlo, seguramente habrá cumplido su objetivo.

Bibliografía

Brousseau, G. (1980) “Problemas en la enseñanza de los decimales” (1981) “Problemas de didáctica de los decimales”, IMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

Centeno Perez, J. (1988) Números decimales ¿por qué? ¿para qué? Ed. Síntesis, España.

Confrey, J. (1995) ”Studente voice in examining splitting as an approach to ratio, proportions and fractions”. Procecdings PME.

Charnay, R. (1990) «Aprender por medio de la resolución de problemas». En Parra, C. y Saiz, I. (1994).

Douady, R. «Rapport enseignement apprentissage: dialectique outil-objet,jeux de cadres». Cahier de didactique des mathematiques n3 Irem de Paris. y PERRIN GLORIAN, M. J. ”Nombres decimaux”, Université de Paris 7.

Lerner, D. (1992) La matemática en la escuela, Ed Aique, Bs As.

Panizza, M. y Sadovsky, P. “El papel del problema en la construcción de los conocimientos matemáticos”. Material destinado a la capacitación docente. Provincia de Santa Fe. FLACSO.

Parra, C. (!994) “Cálculo mental en la escuela primaria” en Parra y Saiz (comp.).

Parra, C. y Saiz, I. (1994) comp. Didáctica de Matemáticas Editorial Paidós, Bs. As.

Perrin Glorian, M. J. (1995) “Sens, algorithmes et representations symboliques“, Actes du Congres National des Conseillers Pédagogiques.

Sadovsky, P. (1992) »Fundamentación de Matemática» Documento para el Nivel Medio. Provincia de la Pampa.

Saiz, I. (1994) ”La dificultad de dividir o dividir con dificultad“, en Parra y Saiz (comp.).

Vergnaud, G. (l991) El niño, las matemáticas y la realidad, el problema de las matemáticas en la escuela, Ed. Trillas, México.

Vergnaud, G. y Ricco, G. »Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos» Revista Argentina de Educación nº6, AGCE.

PALABRAS FINALES (Véase Textos que enmarcan...)