Provincia de Buenos Aires
Dirección General de Cultura y Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal
Dirección de Educación General Básica
Gabinete Pedagógico Curricular - Matemática

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIVISIÓN EN LOS TRES CICLOS DE LA EGB

Documento Nº 2 - Año 2001

Introducción

Durante los últimos cuatro años se han desarrollado numerosos encuentros organizados por esta dirección con maestros, profesores, directores e inspectores de diferentes escuelas, distritos y regiones.

La finalidad de los mismos fue ofrecer espacios de reflexión conjunta sobre la enseñanza de diversos contenidos del área de matemática.

En el marco de estas experiencias, se ha elaborado el documento 1/99 en el que han participado maestros y directores con el objetivo de difundir algunas de las ideas y actividades desarrolladas en los encuentros y en las aulas.

En estos años, muchos de los docentes participantes, han realizado acciones de difusión en sus escuelas o distritos, convocando a colegas a compartir sus experiencias.

Este documento apunta en esa misma dirección: acercar al resto de los docentes el trabajo realizado por los participantes de los encuentros. En este caso particular, sobre la enseñanza de la división.

Queremos agradecer la colaboración y el apoyo brindado por: Jefes de Inspectores, inspectores, directores, profesores y maestros, maestros recuperadores, orientadores educacionales y a los directores de las escuelas sedes de los encuentros. Todos ellos han participado de modos diversos para su realización.

También, y muy especialmente, agradecemos a los docentes que han difundido sus experiencias organizando encuentros, a los maestros que han abierto las puertas de sus aulas para compartir clases, y a todos aquellos que nos hicieron llegar informes del trabajo en las aulas y producciones de sus alumnos con la finalidad de difundir y compartir experiencias didácticas. (No podemos mencionarlos a todos aquí ya que se trata de más de quinientos docentes)

Asimismo aclaramos que hemos tenido que seleccionar producciones para elaborar este documento, y en dichos casos sí mencionaremos escuelas y docentes. Sepan disculparnos - el resto de docentes y alumnos – por no poder volcar aquí la enorme cantidad de producciones recibidas, que, serán muy útiles para continuar con los trabajos de difusión en otros encuentros.

Horacio Itzcovich y Claudia Broitman

La Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB

¿Por qué la enseñanza de la división? Muchos docentes solicitaron trabajar en torno a este contenido dada la gran cantidad de problemas que encontraban para su enseñanza: dificultades de los alumnos para apropiarse del algoritmo, especialmente con divisores de dos cifras, ausencia de estimación previa y de control posterior acerca de los resultados obtenidos; no reconocimiento de la división como recurso para resolver ciertos tipos de problemas. Otra dificultad habitual mencionada por los docentes fue la asociación de la palabra "repartir" a la operación de división que realizaban los alumnos. Por ejemplo, frente a la presencia de dicho término en un problema, algunos niños dividían aunque no fuera ésta la operación que resolvía el problema, y si no aparecía dicho término, algunos alumnos no reconocían la división como medio de resolución.

A partir de estas dificultades comunes planteadas por los docentes en el primer encuentro en diversas regiones propusimos revisar su enseñanza.

El marco teórico desde el cual trabajamos es la Didáctica de la Matemática. Consideramos en particular los aportes de Brousseau (1986) y Vergnaud (1986), las indagaciones psicológicas de Ferreiro (1976), y Carraher-Carraher y Schliemann (1991). También entre los principales aportes, consideramos los trabajos psicológicos y didácticos de Lerner (1992, 1994) y Sadovsky (1994, 1997, 1999, 2000), los artículos de Parra (1994) y Saiz (1994) y algunos de nuestros propios trabajos curriculares y de difusión de propuestas didácticas (1997, 1999, 1999, 2000).

El punto de partida fueron ciertas ideas que han sido desarrolladas en los encuentros y serán abordadas en este documento:

"La enseñanza de la división puede iniciarse desde primer año de la EGB."

"Los problemas de división pueden ser resueltos por una variedad de procedimientos y operaciones."

"La división es una operación que permite resolver una gran variedad de problemas."

"El dominio del algoritmo no garantiza reconocer sus ocasiones de empleo en distintos tipos de problemas."

"El algoritmo es solamente un recurso de cálculo – y no necesariamente el principal – que los niños deben aprender en la EGB."

"El estudio de la división es de tal complejidad que exige muchos años de la escolaridad. Su enseñanza abarca también el tercer ciclo"

En este documento desarrollaremos estas ideas.

Parte I : Problemas "de dividir" desde primer grado[1]

Hemos planteado dos ideas complementarias: "La enseñanza de la división puede iniciarse desde primer año de la EGB" y "Los problemas de división pueden ser resueltos por una variedad de procedimientos y operaciones".

Los niños están en condiciones de resolver mediante diversos procedimientos problemas de reparto y partición desde mucho antes de dominar recursos de cálculo[2].

Enfrentar a los alumnos desde los primeros años de escolaridad a este tipo de problemas les permite, por una parte, aprender a elaborar estrategias propias de resolución de problemas cuando no tienen aún disponible un recurso económico. Y por otra parte, abona al proceso de construcción del sentido de dicha operación.

¿Qué implica aprender a dividir? Entre otros aspectos - que iremos desarrollando en este documento - , abarca construir estrategias variadas de resolución de problemas.

¿Qué tipos de problemas pueden plantearse desde primer grado? ¿Qué procedimientos utilizan los niños? ¿Qué avances se pueden provocar?

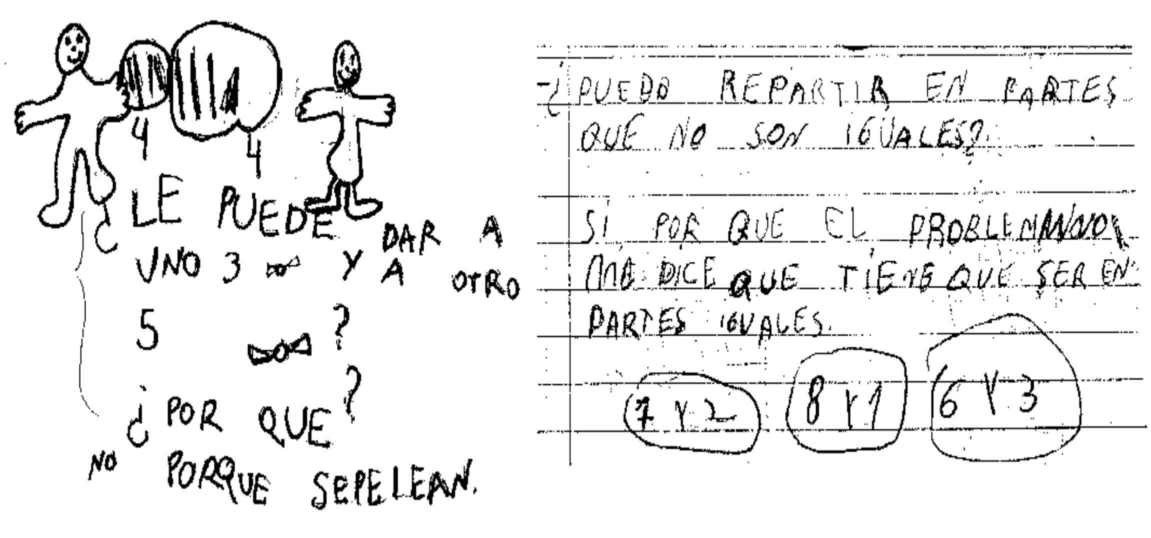
Problemas de reparto con varias soluciones[3]

Hemos sugerido trabajar con problemas de reparto, incluyendo algunos en los que el reparto no es necesariamente equitativo. La finalidad está en lograr que los niños analicen frente a los enunciados de los problemas, si hay o no una restricción de reparto equitativo. Leer enunciados, revisarlos, transformarlos, considerar la cantidad de soluciones posibles, etc. forma parte de la tarea de aprender a resolver un problema.

Por ejemplo Claudia Lambertucci, maestra de primer año de la escuela Nº 3 de Roque Pérez, les planteó a los alumnos el siguiente problema: "Un señor tiene 8 caramelos y se los da a dos niños ¿Cuántos les da a cada uno?" . La mayor parte de los niños contestó que eran 4 para cada uno. La maestra preguntó entonces si era posible darle 5 a uno y 3 a otro. Al principio los niños comentan que sería injusto. Claudia les propone releer el problema para analizar si es posible desde el enunciado. Como el mismo no dice nada acerca de la equitatividad del reparto, les pregunta qué debería decir el mismo para que "sí o sí deban recibir la misma cantidad". Los alumnos sugieren agregar al enunciado "en formas iguales". Esto es registrado en los cuadernos.

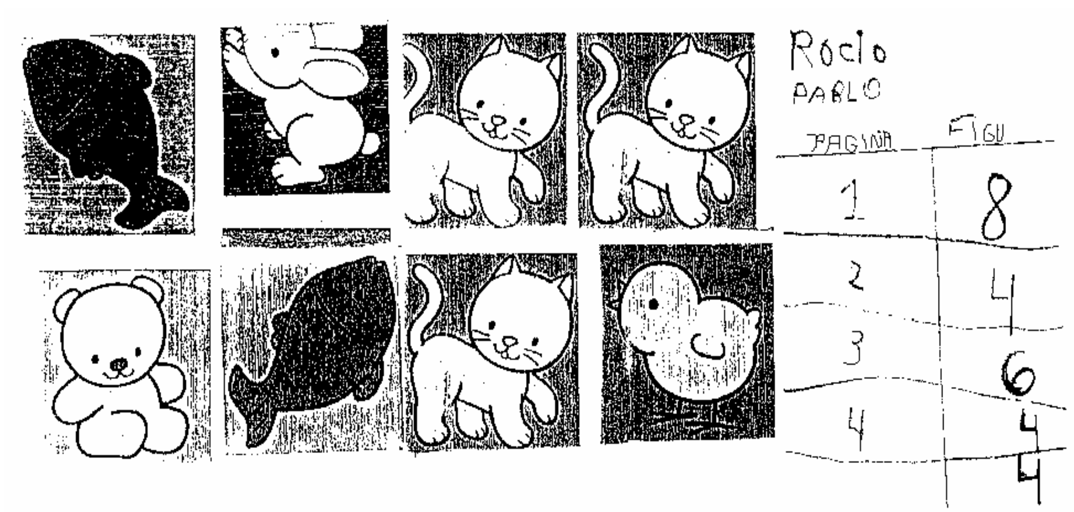
---

[1] Ver Broitman (1998,1999) ; Pre Diseño Curricular 1º ciclo GCBA (1999) y Doc 1/99 D.E.P. Prov de Bs. As.
[2] Incluso este tipo de problemas es propuesto para ser planteado en el Nivel Inicial en el Diseño Curricular de la Pcia de Bs. As, pág. 45.
[3] Ver Pre Diseño Curricular 1º y 2º ciclos. GCBA (1999)



Estas mismas discusiones y conclusiones se plantearon en 1º, 2º y 3º años de la EGB, con otros contextos y números mucho mayores.

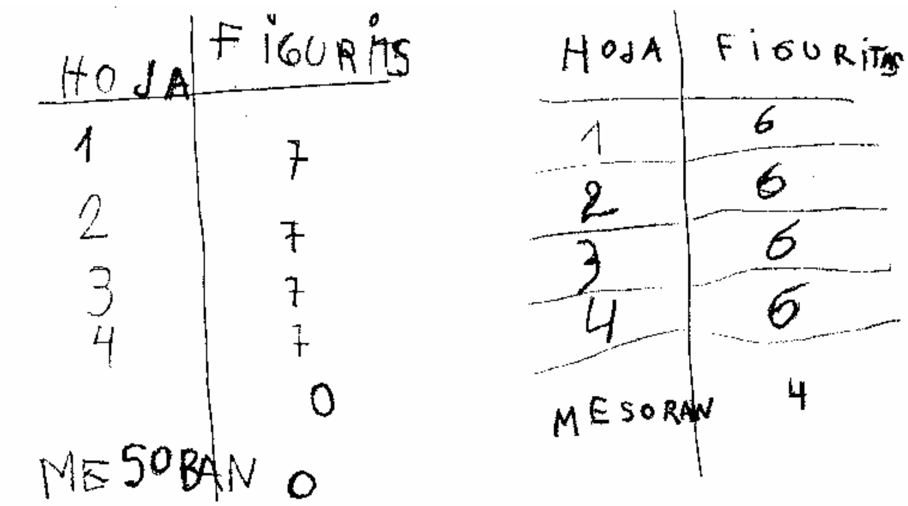
Con la misma finalidad de promover reflexiones acerca de que hay repartos equitativos y no equitativos, en la escuela Nº 39 de Morón, le propusieron a los chicos de 1º año un problema en el que tenían que pegar figuritas en un pequeño “álbum casero” de 4 páginas. En la contratapa había una hoja en blanco para anotar en un cuadro de doble entrada cuántas figuritas se pegaban en cada página y cuántas sobraban. La primera vez se les entregó a cada grupo un álbum y 22 figuritas. Los niños las empezaron a pegar llenando la primera página con muchas y el resto en las siguientes. Por ejemplo, Rocío y Pablo llenaron así su álbum:



La segunda consigna fue diferente: se les entregó a cada grupo un nuevo álbum y 28 figuritas con la consigna de que pegaran todas las figuritas, pero que, esta vez haya la misma cantidad en cada página. Esta restricción les exigía pasar de un procedimiento improvisado de pegado, hacia la necesidad de realizar una anticipación de cuántas pegar en cada página.

Algunos niños logran pegar 7 en cada hoja utilizando un procedimiento de reparto de 1 en 1 , como Nazarena y Micaela , o de 2 en 2 como Magalí.

Otros niños pegan 6 en cada uno y escriben que les sobran 4, como Tomás y Jazmín.



Luego, la docente plantea a toda la clase *“si se pueden seguir repartiendo las figuritas que sobran”.* A partir de esta intervención, se promueve un intercambio colectivo, producto del cual, se arriba a la conclusión de que 7 es la respuesta correcta.

Nos parece importante resaltar, que en esta clase, como sucede en tantas otras, hubo muchos niños que obtuvieron resultados erróneos. Aquí no se trata de cómo “corregir” los errores que aparecieron, sino considerarlos motor de debate y avance para todos.

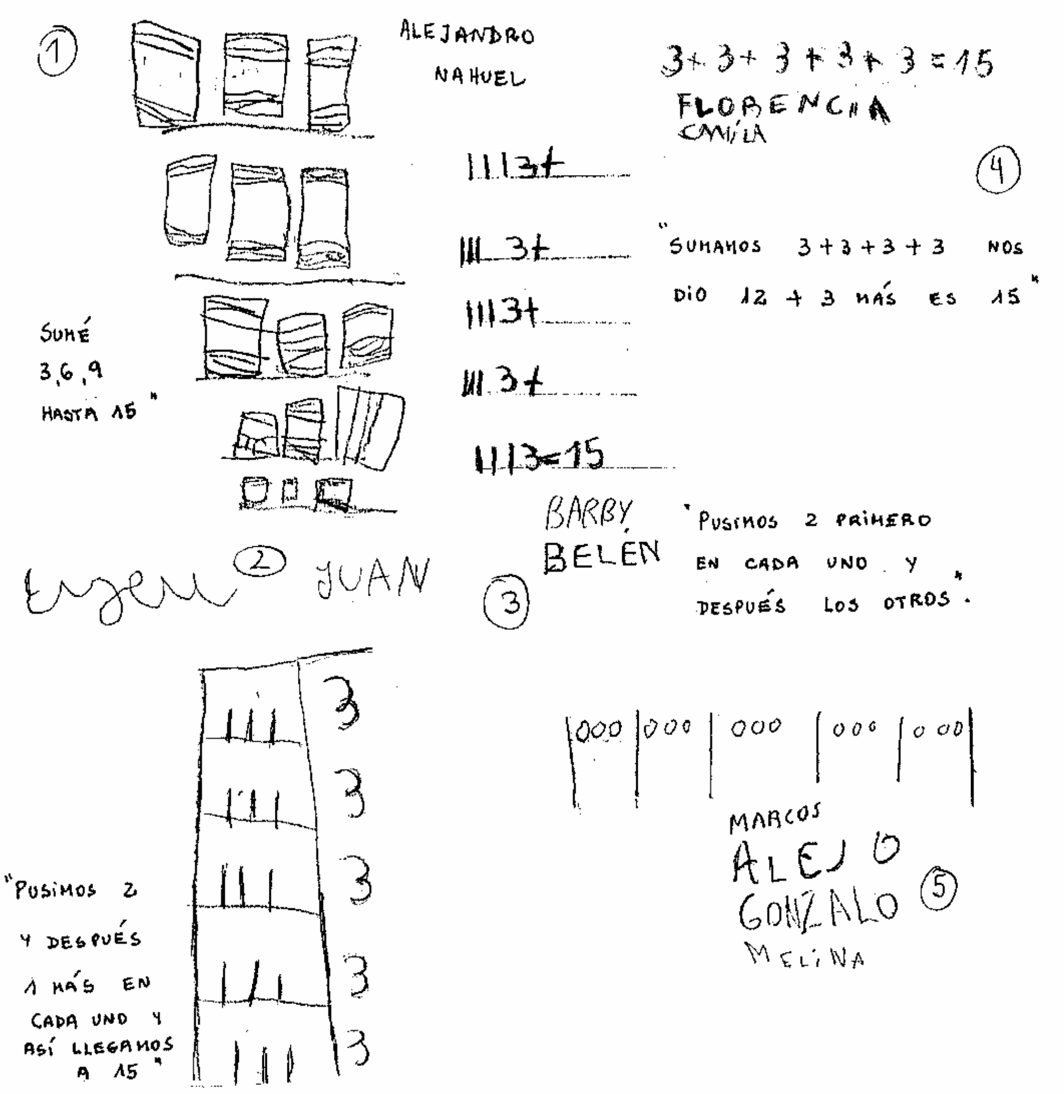
El registro en el cuaderno de la discusión colectiva o de las conclusiones obtenidas permitirá resaltar el producto del trabajo, por ejemplo *“algunos chicos repartieron menos, pero se podía seguir repartiendo”*.

Problemas de reparto equitativo

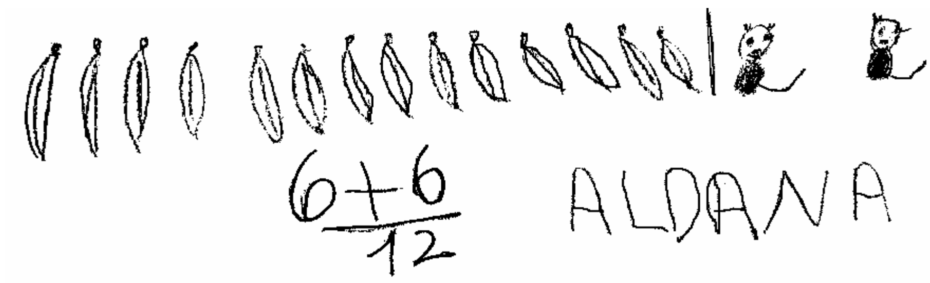
Los niños de los primeros años de la EGB, cuando no disponen de un algoritmo para dividir, utilizan diversos procedimientos para resolver los problemas.

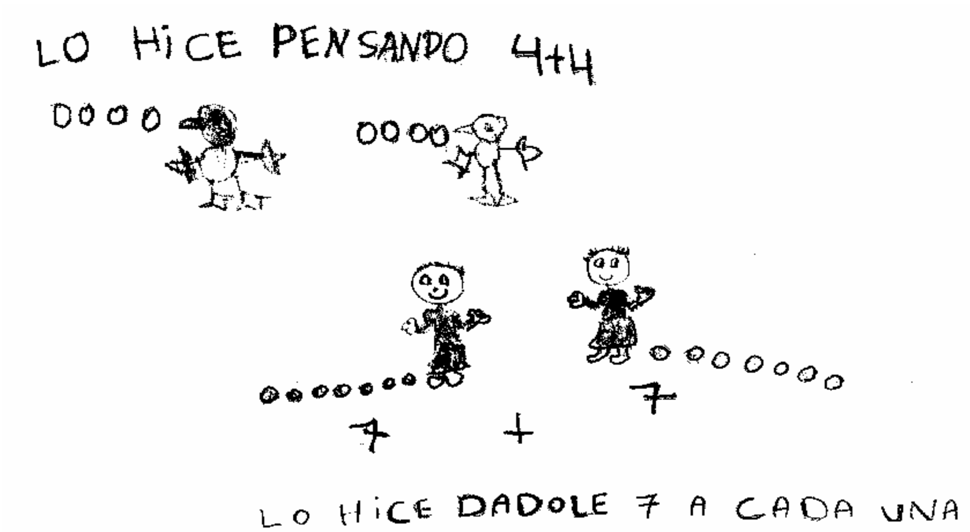
Silvia Palacios, maestra de 1º año de la Escuela Nº 11 de Vte. López propuso a sus alumnos la resolución de un problema: *“Para la biblioteca del aula juntamos 15 libros. Tenemos que acomodarlos en 5 estantes y que en todos los estantes haya la misma cantidad de libros ¿Cuántos libros pondremos en cada uno?”*

Los niños dibujan, cuentan o suman para resolverlo:



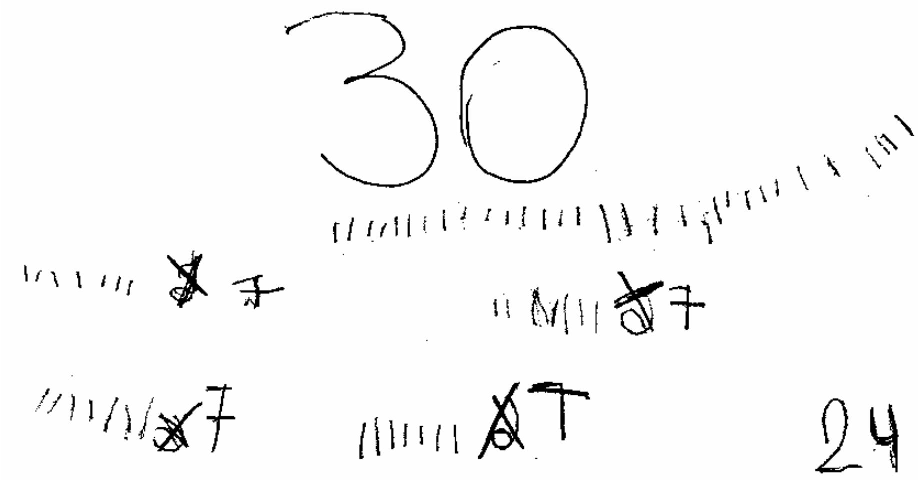
Los niños de primer año de la Escuela Nº 1 de 25 de Mayo, resuelven problemas de reparto de 8, 12 y 14 repartidos en 2 partes iguales apoyándose en los recursos de cálculo ya conocidos. Evidentemente el trabajo con los “dobles” y “mitades” de ciertos números funciona como un recurso disponible para resolver las situaciones planteadas:



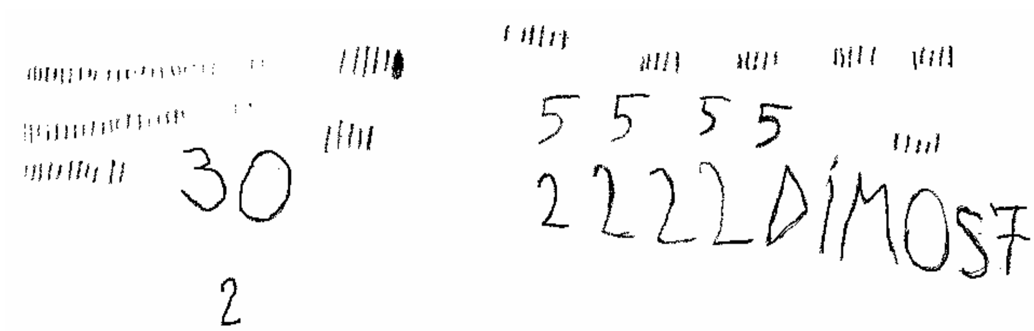


En la Escuela Nº 119 de González Catán (La Matanza), en el contexto de un juego de dados y chapitas que involucraba repartos, la maestra de 1º año y el director, Mariano Guerschman, propusieron a los niños *"dejar a un lado los dados y las chapitas"* y determinar *"cuántas chapitas le corresponden a cada uno si hay que repartir 30 chapitas entre 4 chicos y que todos reciban la misma cantidad".*

Un grupo hace 30 rayitas y haciendo un reparto uno a uno llegan a repartir 6 a cada uno, escriben el 6 al lado de las rayitas y anotan el total de chapitas repartidas, en este caso 24. Luego, se dan cuenta de que pueden seguir repartiendo y tachan el seis, agregan una rayita más a cada uno y ponen 7 para cada uno:

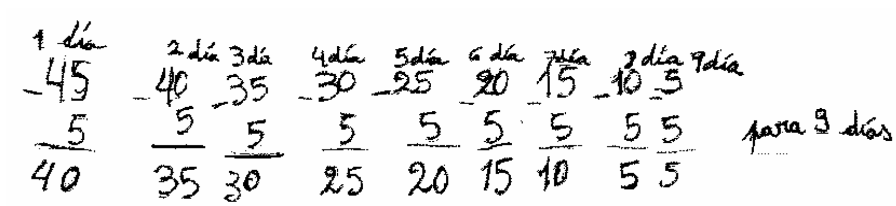


Otro grupo también apoyándose en su previo dibujo de las rayitas, reparte 5 a cada chico, y luego agregan 2 más, anotando finalmente 7 en la respuesta al problema.

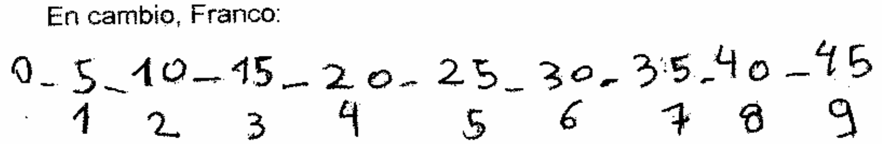


En la escuela Nº 8 de Bella Vista, (San Miguel), la directora Patricia Reinoso, y las maestras de 2º año, Marcela Cichini y Telma Del Valle, proponen a los niños el siguiente problema: *"Tengo $ 45, gasto $5 por día. ¿Para cuántos días me alcanza?".* Los niños resuelven este problema apelando a diversos recursos: restas sucesivas, conteo de 5 en 5 hasta llegar a 45.

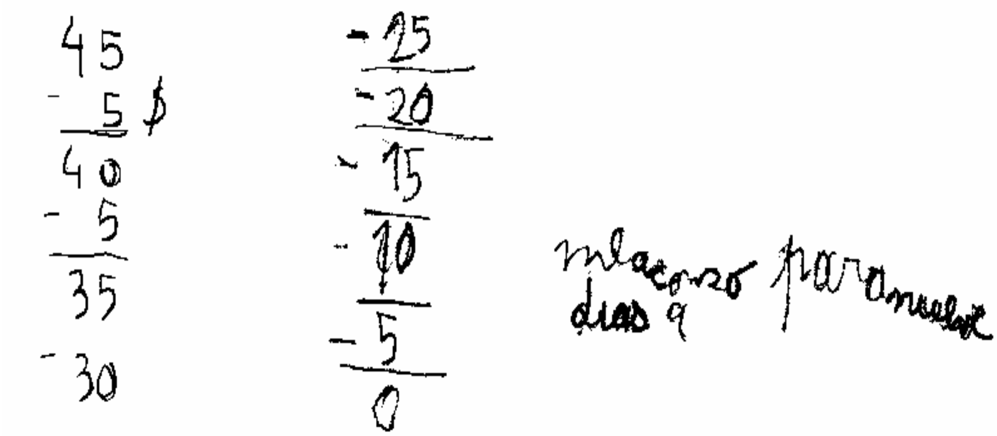
Cristian hace lo siguiente:



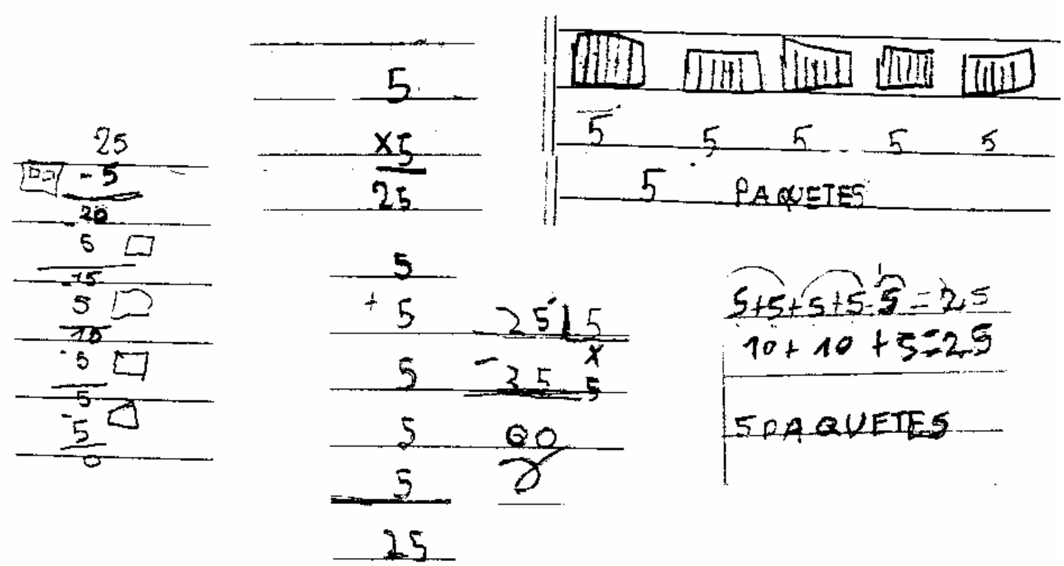
En cambio, Franco:



Diego comienza haciendo restas sucesivas y cuando llega a 30 se da cuenta de que no precisa escribir las restas, anotando directamente los números al descontar de 5 en 5.



Ana Migiotti, maestra de 3º año de la escuela Nº 14 de N. de la Riestra (Distrito 25 de mayo), propuso a los niños este problema: *“Mi mamá donará una torta para la fiesta. Para hacerla necesita 25 galletitas de chocolate. Si cada paquete tiene 5, ¿cuántos paquetes necesita?”.* Algunos niños dibujan, otros suman, otros restan, otros multiplican y hasta algunos producen una escritura próxima a la división:



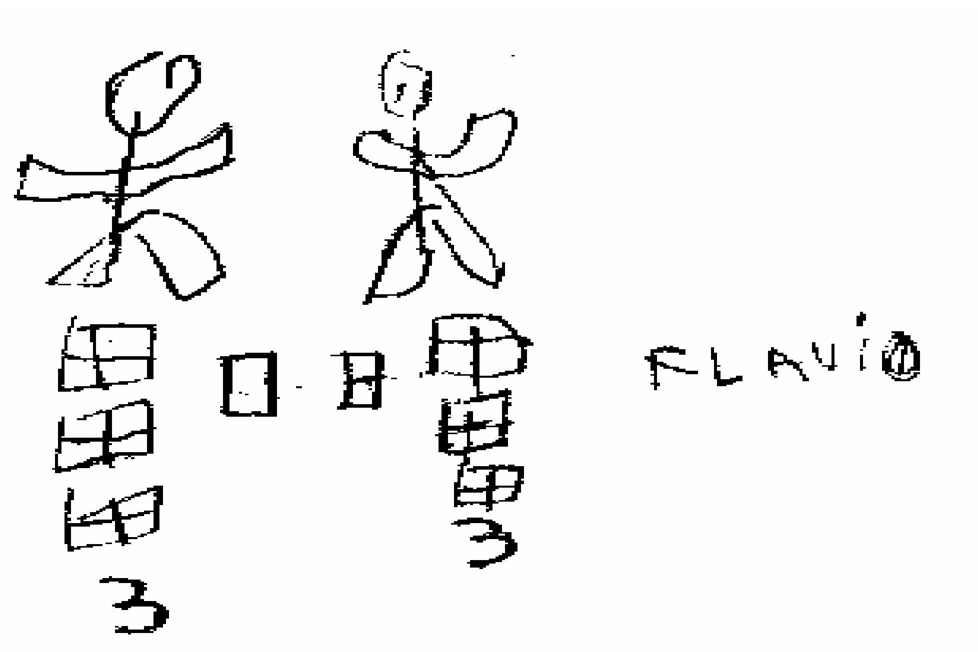
Evidentemente, es posible generar clases de matemática, en las cuales el ambiente de trabajo es propicio para la producción y elaboración de estrategias diversas, como sucede en estas clases. Es importante promover luego una instancia de trabajo colectivo que permita comparar dichas estrategias. Tal vez “a los ojos de los niños” todos estos recursos no guarden relación entre ellos. Queda bajo la responsabilidad del docente, generar en la clase, un trabajo de análisis de las relaciones entre unos y otros. Del mismo modo, el registro de las conclusiones o de los diversos recursos posibles en carteles en el aula y en cuadernos, ayudará a los alumnos a apropiarse de lo producido en la clase.

Problemas en los que hay que decidir qué hacer con lo que sobra[4]

Es importante desde los primeros contactos con los problemas de reparto enfrentar a los alumnos a tener que analizar qué hacer con los elementos que sobran. Por ejemplo, Cora Corbetto, maestra de 1º año de la escuela Nº 7 de Navarro, les plantea a los alumnos un problema en el que hay que repartir chocolates y otro en el que hay que repartir globos, con el objetivo de promover la discusión acerca de que *"los chocolates se pueden partir, pero no lo globos"*

Cora nos cuenta que "*en el primer problema muchos alumnos decidieron repartir los chocolates en partes iguales y el que sobraba no dárselo a ninguno de los dos. Otros alumnos decidieron darle el que sobraba en mitades iguales a cada uno de los niños. Manifestaron que podían hacerlo ya que eran chocolates y se pueden partir a la mitad. En el segundo problema también repartieron en partes iguales, y el globo que sobró dijeron no poder repartirlo porque se reventaría."*

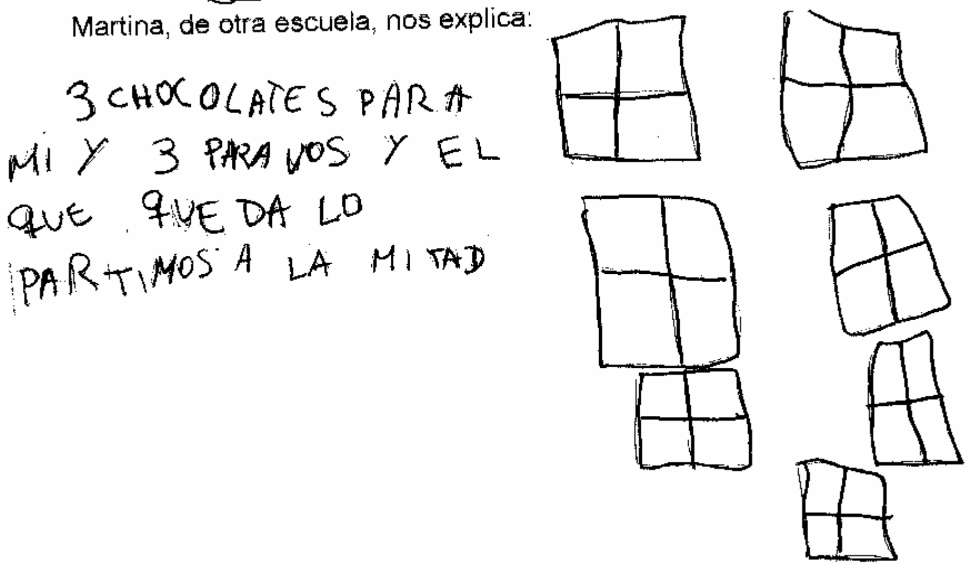
Por ejemplo, Flavio escribe primero 3 chocolates, y luego dibuja medio más para cada uno.



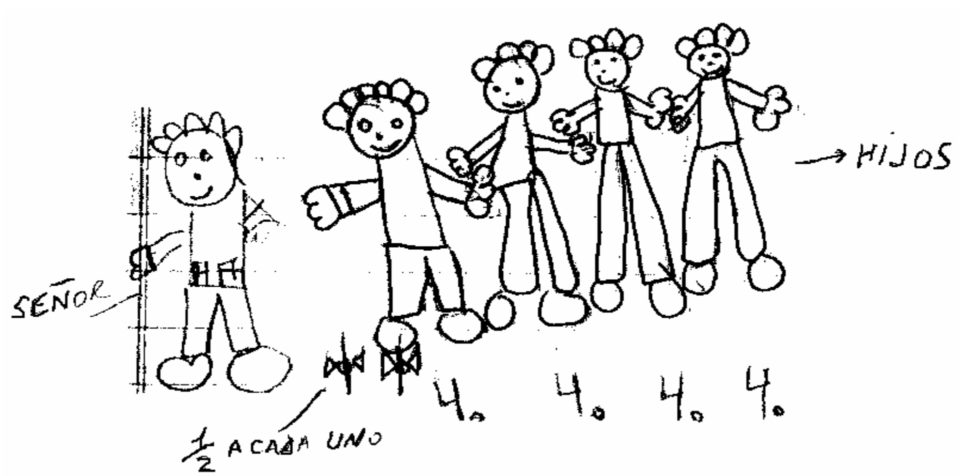
[4] Ver Broitman (1997, 1999) y Documento 1/99 D.E.P. Prov. Bs. As.

Belén reparte 4 a uno y 3 a otro, y luego tacha uno de los chocolates repartidos para que queden iguales.

Martina, de otra escuela, nos explica:



Graciela Bracco maestra de 2º año de la escuela Nº 14 de 25 de Mayo plantea a sus alumnos el siguiente problema: : *“Un señor tiene 18 caramelos y quiere repartirlos en partes iguales para sus 4 hijos. ¿Cuántos les dará a cada uno?*. Agustina realiza una partición del resto:



Es necesario recordar que en la primera producción la mayoría de los niños no toma en cuenta la posibilidad de repartir o no lo que sobra, o bien “se los dan a uno”. Es a través de una instancia de discusión que todos los alumnos podrán ir apropiándose de la solución correcta. Lo aprendido, será fértil para resolver un nuevo problema.

Tampoco será suficiente con una sola situación para que todos los niños puedan aproximarse al conocimiento que está en juego. Será necesario planificar una colección de problemas para varias clases.

Parte II : Diferentes tipos de problemas de división[5].

Al inicio hemos planteado otras dos ideas: “La división es una operación que permite resolver una amplia gama de problemas diversos” y “El conocimiento del algoritmo no garantiza el reconocimiento de su uso en distintos tipos de problemas”.

Como hemos visto en la parte I, un tipo de problemas que pone en juego la división, son los problemas de reparto o partición. La operación de división ha estado clásicamente vinculada a este tipo de problemas. Son los más sencillos de reconocer para los niños y los más presentes en la escuela. Sin embargo, el concepto de la división permite resolver una mayor diversidad de situaciones.

¿Qué otros tipos de problemas pueden plantearse a los alumnos de los diferentes años?

Problemas de organizaciones rectangulares

Así como para resolver un problema como el siguiente: *“En un teatro hay 32 filas de butacas. Si en cada fila hay 18 butacas. ¿Cuánta gente sentada entra?”* es pertinente recurrir a la multiplicación, la división es una herramienta válida para resolver problemas que impliquen organizaciones rectangulares[6].

Por ejemplo, problemas como los siguientes, en los que no hay resto:

- *“Miro un portero eléctrico y cuento que hay 28 botones. Si hay departamentos A,B, C y D. ¿Cuántos pisos hay? (no hay deptos. en PB)”*
- *“En una chacra hay 4032 limoneros. Si están plantados en 72 filas. ¿Cuántos árboles hay en cada fila?”*

O como el siguiente, en el que hay resto:

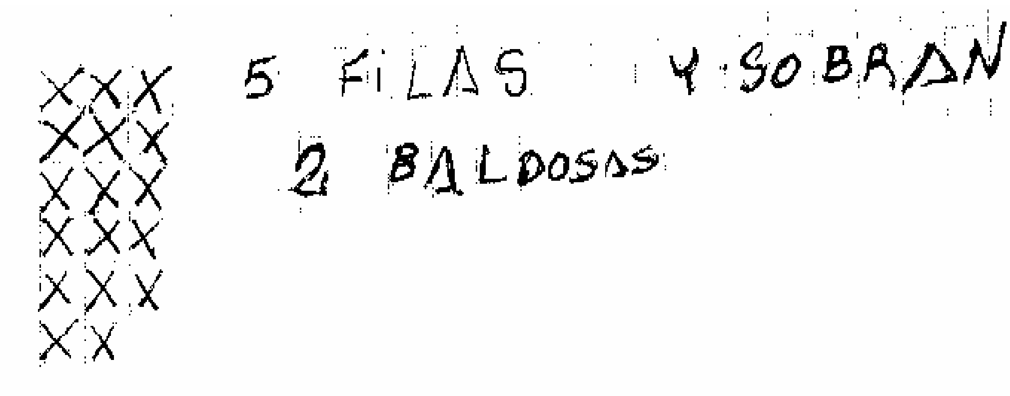
- *“Tengo 234 baldosas para embaldosar la terraza. Si voy a colocarlas en 17 filas. ¿Cuántas puedo poner en cada una? ¿Sobran baldosas? ¿Cuántas?”*

En la Escuela Nº 1 de Hurlingham, en segundo año, se les propuso a los niños una batería de problemas con patios, filas y columnas: *“Tengo 17*

[5] Ver Saiz (1994); Documento Nº4 (1997) GCBA y Pre Diseño GCBA (1999)
[6] Ver documento 1 /99 DEP Prov. de Bs. As.

baldosas para armar un patio rectangular. Si pongo 3 baldosas en cada fila. ¿Cuántas filas puedo armar? ¿Cuántas baldosas sobran?

Por ejemplo, en el grupo de Pamela, Mirna, Jennifer y Noelia recurren al dibujo:



Luego se les planteaban directamente los datos:
- 23 baldosas, 5 en cada fila. ¿Cuántas filas? ¿Cuántas sobran?
- 53 baldosas, 5 en cada fila. ¿Cuántas filas? ¿Cuántas sobran?
- 42 baldosas, 8 en cada fila. ¿Cuántas filas? ¿Cuántas sobran?

En otro grupo, inician el proceso de resolución del primero de estos problemas a través del dibujo, luego realizan un cálculo de sumas reiteradas y anotan a continuación la suma del resto para reconstruir el total de 23.

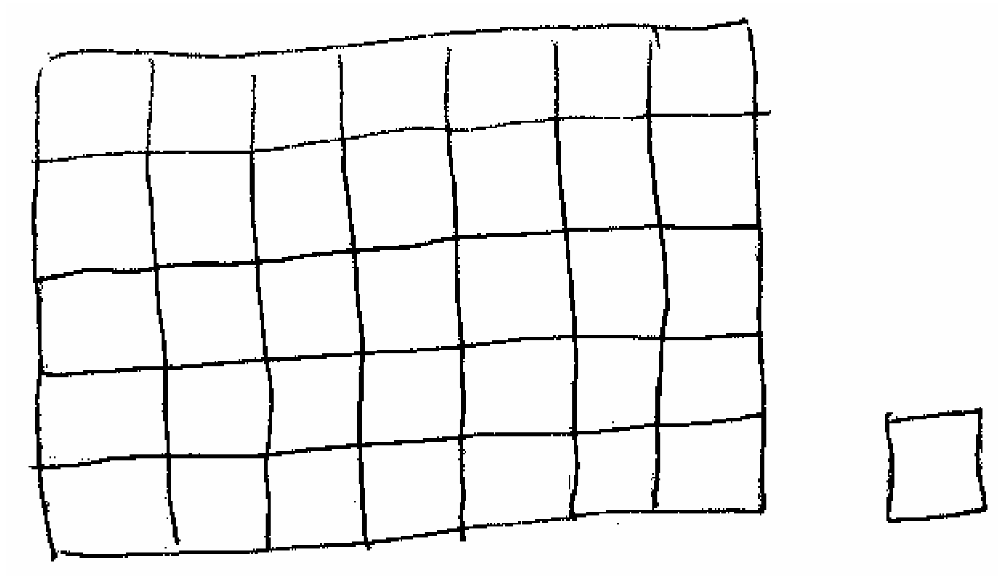
Si bien no es objetivo de segundo año el estudio de los recursos de cálculo de la división, los niños tienen herramientas diferentes que les permiten resolver estos problemas. Del mismo modo que hemos señalado para los problemas de reparto, es parte del estudio de esta operación en el primer ciclo la resolución de problemas de este tipo por medio de procedimientos diversos (en este caso dibujos inicialmente, y luego sumas, restas o multiplicaciones).

En tercer año, este tipo de problemas puede incluso abonar para el estudio del algoritmo. Por ejemplo, Marcela Vila, maestra de tercer año y Silvina Abramoff, maestra recuperadora, ambas de la Escuela Nº151 de Ciudad Evita, La Matanza, plantearon a sus alumnos un conjunto de problemas. Nos aclaran que los niños venían trabajando desde segundo año con diversos problemas de organizaciones rectangulares, en el marco del trabajo con la multiplicación.

"*Armar un patio rectangular de 28 baldosas y 4 baldosas por fila. ¿Cuántas filas va a tener el patio?".*

"Armar un patio rectangular con 36 baldosas y 5 baldosas en cada fila ¿Cuántas filas va a tener el patio?"

Para resolver este tipo de problemas, muchos alumnos recurren al dibujo de los patios, como Lucas y Florencia:



A continuación sus docentes les solicitan que busquen cálculos que representen la situación. Producen allí multiplicaciones y sumas organizadas de diferentes maneras. Por ejemplo:

$\begin{array}{r} 5 \times 7 = 35 \\ \underline{+\ 1} \\ 36 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \times 6 = 24 \\ \underline{+4} \\ 28 \end{array}$

A partir de este trabajo, se inició la construcción del algoritmo de la división, aspecto que tomaremos en la tercera parte de este documento.

Y cuando los niños ya dominan el algoritmo, por ejemplo, a fines de tercer año o principios de cuarto, es interesante plantearles este tipo de problemas con el fin de enriquecer el concepto de la división. Por ejemplo: *"Para la fiesta de la intendencia se quiere ubicar 3452 butacas. En la plaza se pueden colocar 132 butacas por fila. ¿Cuántas filas se pueden armar? ¿Sobran butacas?"*

En el segundo ciclo se aspira a que los alumnos recurran al algoritmo de la división para enfrentarse a este tipo de problemas. Aunque algunos aún utilicen otros recursos, será parte de la tarea a desarrollar, lograr que todos reconozcan esta operación como la más económica.

Problemas de iteración[7]

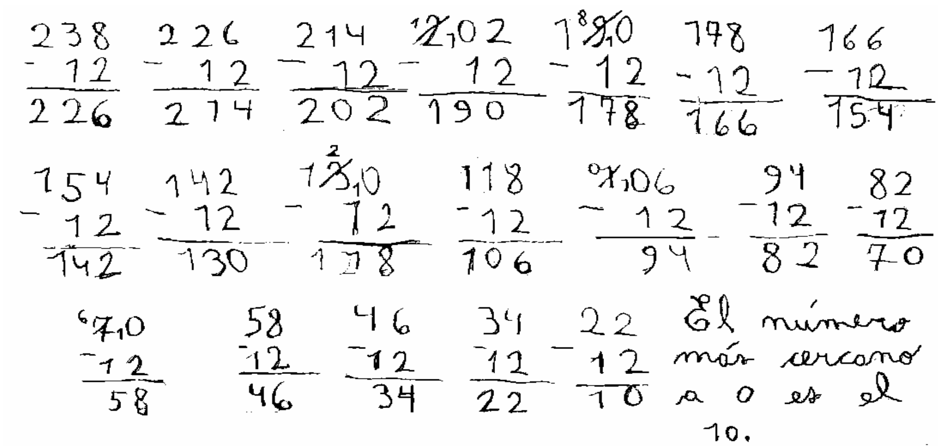
Hay otro tipo de problemas para los cuales la división es una herramienta apropiada. Se trata de aquellos en lo que hay que "encontrar cuántas veces entra un número adentro de otro", aunque los contextos en los que se presentan no den cuenta "inmediatamente" de esta relación.

[7] Ver Documento Nº 4 (1997) GCBA y Pre Diseño Curricular (1999) GCBA

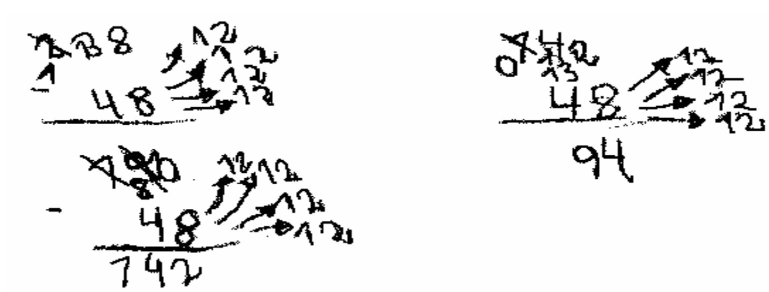
Veamos algunos problemas de este tipo que los maestros plantearon a sus alumnos en diferentes años de la E.G.B:

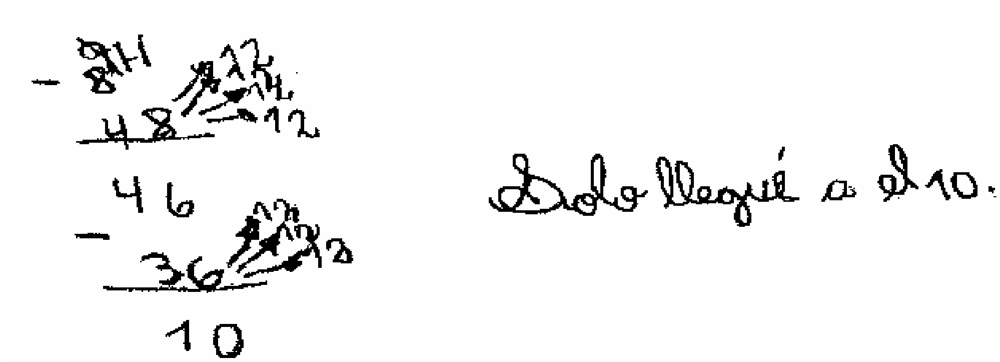
En segundo año de la Escuela 1 de 25 de Mayo, les presentaron a los niños el siguiente problema: *"Estoy en el número 238. Doy saltitos para atrás de 12 en 12. ¿A qué número llego más cercano al 0?"* [8]

Algunos alumnos realizan restas sucesivas de 12 en 12



Otros alumnos se dan cuenta de que es más conveniente restar "varios doces juntos" como en este caso:





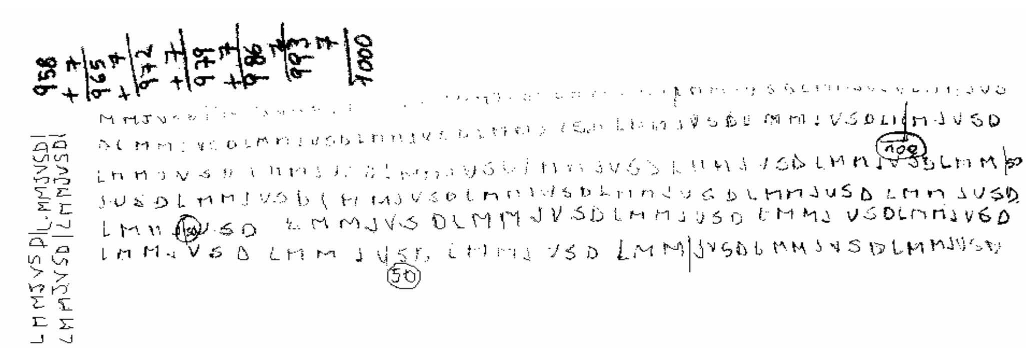
[8] Obviamente, en primer ciclo se trabaja sólo con números naturales.

La intención de este trabajo es que los alumnos puedan comparar los diversos modos de resolverlo, y analizar la economía de uno sobre el otro.

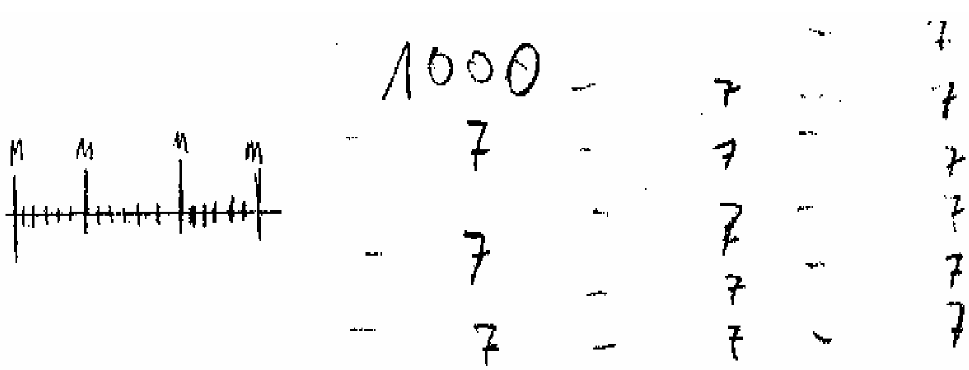
En tercer o cuarto año, los alumnos podrán reconocer la división como recurso para resolver también este tipo de problemas.

Por ejemplo Dora Callegare, María del Carmen Sivero y Hurí Graciela Piedrabuena, de la escuela Nº 1 de Gral. Alvear, plantean a los alumnos de sexto año de la E.G.B el siguiente problema: *"Sabiendo que hoy es Martes. ¿Qué día de la semana será dentro de 1000 días? "*[9]

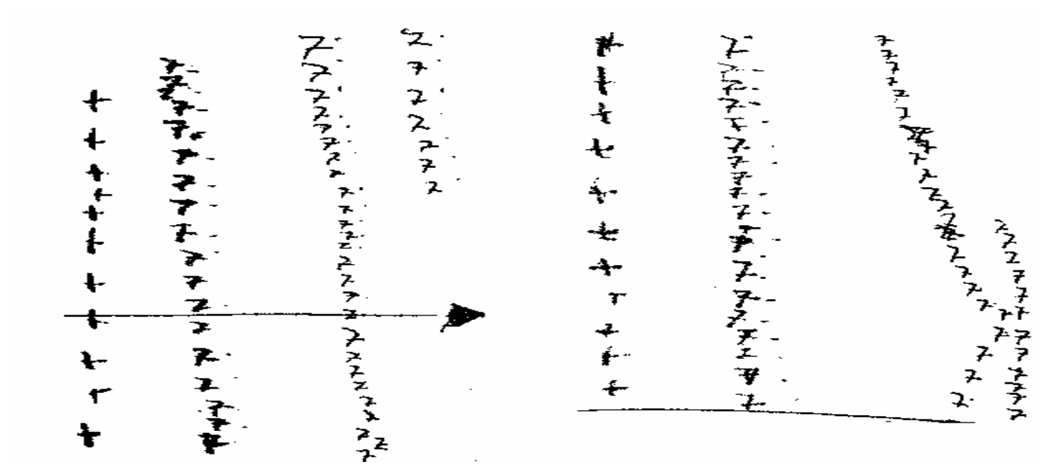
Los alumnos, para resolver este problema, se organizan en parejas. Algunos alumnos, como Diana, comienzan la resolución haciendo largas listas con las iniciales de los días de la semana, señalando la cantidad de días transcurridos (por ejemplo 100). Luego abandona este recurso y continúa sumando "sietes" al darse cuenta de esta regularidad. (transcribimos solo una parte de su larga producción):



Bernardo propone usar una recta numérica como recurso de control y marcar en ella los días Martes con un M y una rayita para cada uno de los días siguientes. Luego abandona esta estrategia y decide realizar restas de siete en siete, mientras dice: *"Le saco siete, le saco siete,..."*. Empieza escribiéndolas y posteriormente pregunta si puede usar la calculadora. La usa para sumar sietes.



[9] Problema tomado del Documento Nº 4 (1997) GCBA



A partir del comentario de Bernardo (*"le saco siete, le saco siete,..."*) se produce el siguiente diálogo:

Matías: ¡ *"Entonces lo podés dividir por siete!*
Maestra: *¿Qué dividís por siete?*
Matías: *Y...mil dividido siete*
Maestra: ¿Por qué?
Matías: *Para no restarlo tantas veces*
(Matías realiza la cuenta obtiene 142 de cociente y 6 de resto)
Matías: *No me doy cuenta. ¿Qué son estos ciento cuarenta y dos y estos seis que sobran?*

Luego de un pequeño diálogo con la maestra, Matías dice: *"son ciento cuarenta y dos semanas"* y pregunta *"¿Y estos seis que sobran?"*. La clase entera comienza a analizar el significado de ese 6 hasta que Gaspar dice que se trata de 6 días. Los alumnos cuentan 6: Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo y Lunes, siendo este último día la respuesta al problema.

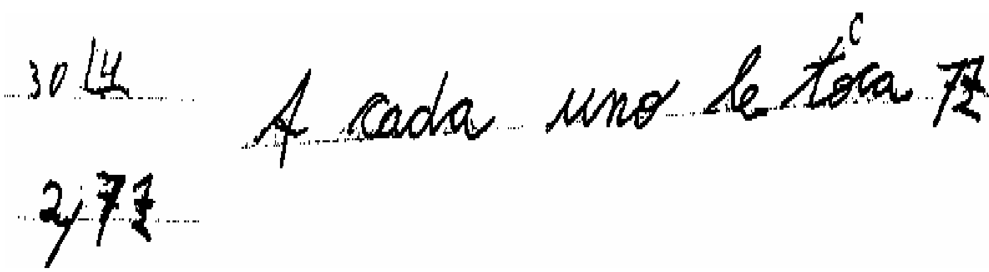
Las docentes retoman la situación y promueven el análisis de los números del algoritmo en relación con el problema. Luego proponen otro problema: *"Qué día de la semana será dentro de 3008 días"* con el objetivo de que ahora todos los alumnos utilicen la división para su resolución.

Estos problemas, además de poder ser considerados como problemas de iteración, tienen la particularidad de que la respuesta a la pregunta planteada, está dada por el análisis del resto, al igual que en otras situaciones.

<u>Problemas de análisis del resto</u>[10]

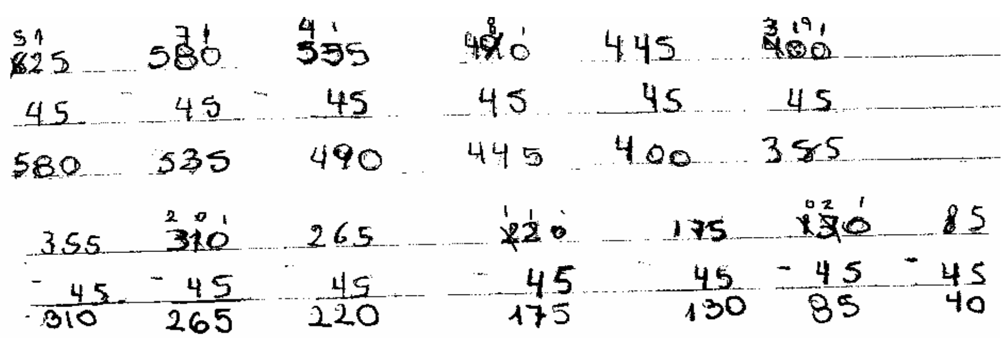
Hemos planteado anteriormente problemas en los que “hay que decidir qué hacer con lo que sobra” para el trabajo en los primeros años. Una vez que los niños ya conocen el algoritmo de la división, este tipo de problemas apunta en una nueva dirección: analizar el significado del resto en el cálculo.

En cuarto año, por ejemplo, se espera que los niños puedan representar de maneras diversas el análisis realizado sobre el resto, como este alumno, frente al problema planteado, escribe a su manera la partición realizada:



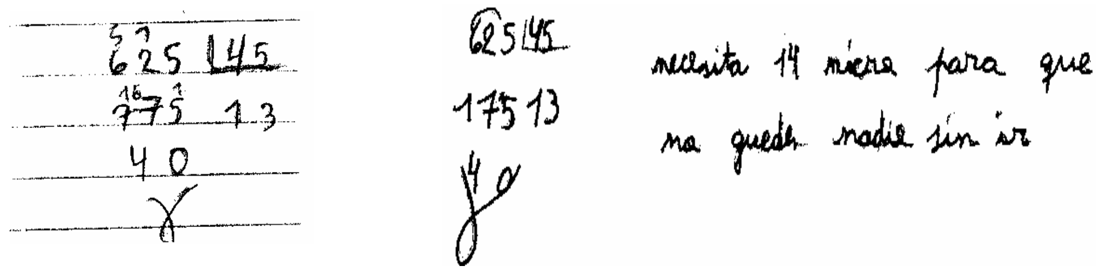
A veces este resto “responde” la pregunta al problema, como en el caso de los 1000 días recién analizado. En otras ocasiones exige considerar “un elemento más”. Veamos algunos ejemplos:

Elena Trezza, Cora Corbetto y Elizabeth Albino, vicedirectora y docentes respectivamente de la escuela Nº 7 de Navarro, plantean a los niños de 6º año el siguiente problema: *“Hay 625 pasajeros para ser trasladados a un congreso en micro. En cada micro entran 45 personas. ¿Cuántos micros se necesitan?”.*[11] Algunos alumnos restaron sucesivamente 45:



Otros alumnos hicieron el algoritmo de la división, obteniendo 13 de cociente y 40 de resto.

[10] Ver Documento Nº 4 (1997) GCBA y Pre Diseño Curricular (1999) GCBA
[11] Problema tomado del Documento Nº 4 (1997) GCBA



Entre los alumnos que usaron restas sucesivas o el algoritmo, algunos dieron como respuesta “13 micros” y otros se dieron cuenta de que era necesario otro micro para los 40 pasajeros que sobraban. A partir del intercambio entre los alumnos y un análisis colectivo de las respuestas obtenidas se pudo arribar a la conclusión de que eran necesarios 14 micros, como registra este alumnos: *“Se necesitan 14 micros para que no quede nadie sin ir”*

Parte III : Cálculos aproximados, mentales, algorítmicos y con calculadora para resolver problemas de división

Hemos planteado al comienzo de este documento las ideas centrales del trabajo realizado con docentes. Entre ellas: *“El estudio del algoritmo es solamente uno – y no necesariamente el principal – recurso de cálculo que los niños deben aprender en la EGB”.*

Hoy en día ha sido ya muy difundida la concepción según la cual en la escuela los alumnos deben adquirir variados recursos de cálculo (Diseño Curricular de la Pcia de Bs. As, tomo 1, 1999; Documento 4 GCBA, 1997; Pre Diseños GCBA ,1999; etc.) Numerosos trabajos (Parra, 1994; Saiz, 1994) coinciden en considerar como objeto de estudio en la escuela la variedad de estrategias de cálculo mental, por ser éste un cálculo reflexionado, en donde los alumnos pueden tener control de las acciones que realizan. Y también en señalar numerosos riesgos de que los alumnos solamente utilicen en la escuela los algoritmos convencionales, dejando afuera infinidad de recursos.

Se incluye dentro de la concepción que adoptamos de cálculo mental tanto el calculo exacto como el aproximado, el oral como el escrito. A partir de muchas dificultades - ya comentadas – que los docentes planteaban en relación con los resultados que los niños obtenían en sus cálculos de dividir, hemos abordado en los encuentros actividades diversas que les permitan a los docentes trabajar en las aulas para que sus alumnos puedan obtener siempre antes de realizar un cálculo algorítimico o con calculadora, resultados estimativos previos y controlar posteriormente los resultados exactos.

Otro tipo de actividades de cálculo mental abordadas involucraban obtener resultados de ciertos cálculos apoyándose en propiedades de los números y las operaciones. Por ejemplo: *“Sin hacer la cuenta, determinar la* *cantidad de cifras que tendrá el cociente de dividir 123.456 por 24",* o bien, *"Para dividir 2438 por 8 un alumno hizo 2438 : 2 y obtuvo 1219. ¿Cómo seguirías este cálculo?; "Sabiendo que 9000 : 2 = 4500 calcular 9000 : 4 ; 27000 : 6 y 90000 : 20; etc.*

Del mismo modo, hoy es habitual considerar la calculadora como una herramienta necesaria de ser utilizada diariamente en la escuela desde primer año para resolver problemas cuyo objetivo no es el cálculo. Este aspecto del trabajo generó un gran debate en los encuentros acerca de los temores de que su uso provocara una disminución del dominio de estrategias de cálculo por parte de los alumnos. Hemos planteado allí la importancia de que los alumnos aprendan, hoy día, muchas estrategias de cálculo más que las que hemos aprendido nosotros. El conocimiento acerca de cómo se inventaron y por qué se difundieron los algoritmos a lo largo de los años (Saiz, 1994), como también la revisión de su importancia actual, forman parte de los desafío actuales de la escuela para la transformación y actualización de los objetos que en ella se enseñan (Pre Diseño GCBA, 1999).

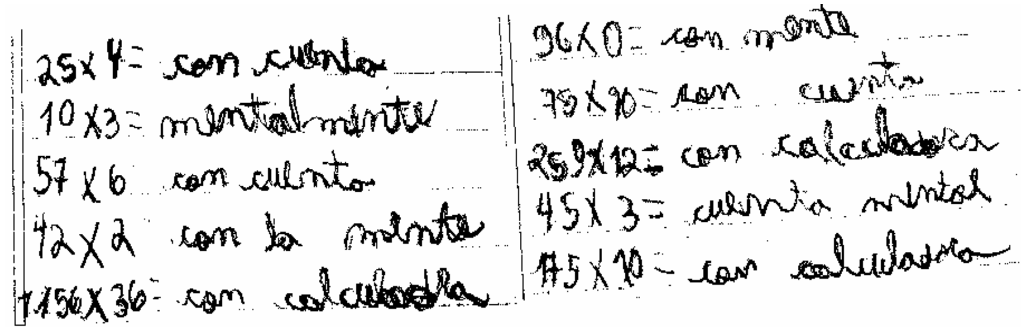
Consideramos que el uso de la calculadora para resolver problemas permite a los alumnos y al docente (bajo ciertas condiciones y decisiones didácticas) "poner el énfasis" de algunas clases en las operaciones, datos, pasos y respuestas de los problemas, en lugar de concentrar la atención en el cálculo algorítmico.

Se propone también su uso diario desde los primeros años en el aula como instrumento de control de otros cálculos realizados y como medio para analizar propiedades de las operaciones. Ya en segundo ciclo incluso como objeto de estudio en sí misma analizando sus propiedades y límites, etc.

Por ejemplo, algunos posibles tipos de problemas de división con calculadora son los siguientes: "*Encontrar el resultado de hacer 2356 : 22 con la calculadora, pero no se puede oprimir la tecla del 2 pues no funciona"* , o bien *"Juan hizo con la calculadora 5425 dividido 15 y obtuvo 339,0625. ¿Cómo hacer, a partir de este resultado, para encontrar el resto usando la calculadora?"*

Es incluso parte del dominio de la división, la posibilidad de tomar decisiones acerca de cuál es el recurso de cálculo más conveniente en cada problema. ¿Qué aspectos determinan la conveniencia de uno u otro recurso? El tamaño de los números, la "redondez" de los mismos, la cantidad de datos a considerar, la posibilidad de apoyarse en cálculos conocidos y memorizados, el contexto de la situación, etc.

Por ejemplo, un alumno de la escuela 1 Bartolome Mitre, a partir del trabajo propuesto por su maestra Mónica Capurro, debe analizar y tomar decisiones acerca de la conveniencia de uno u otro recurso de cálculo. Destacamos que para esta actividad, no era necesario resolver los cálculos, solo analizarlos:


25 x 4 = con cuenta
10 x 3 = mentalmente
57 x 6 con cuenta
42 x 2 con la mente
1156 x 36 = con calculadora
96 x 0 = con mente
75 x 10 = con cuenta
259 x 12 = con calculadora
45 x 3 = cuenta mental
175 x 10 = con calculadora

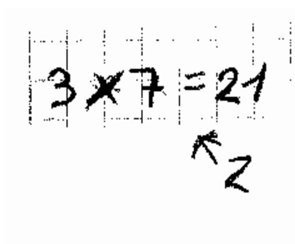
¿Y los cálculos algorítmicos? Ha sido desarrollada la concepción según la cual es posible abordar la construcción del algoritmo a partir de los cálculos mentales iniciales producidos por los alumnos. Esto implica postergar el estudio de los algoritmos para cuando los alumnos han desplegado ya estrategias diversificadas de cálculo mental. Hemos priorizado en los encuentros aquellas actividades que permitan a los alumnos “tender puentes” entre sus propios cálculos y los algoritmos de uso social (Ferreiro, 1986; Carraher, Carraher, Schliemann, 1991) y entre sus escrituras diversificadas y las que la escuela intenta difundir. En varios de los problemas analizados anteriormente hemos podido observar la gran variedad de modos que encuentran los alumnos de registrar las acciones que realizan al dividir. Las mismas son, desde nuestra perspectiva, el punto de partida necesario para aprender las nuevas representaciones.

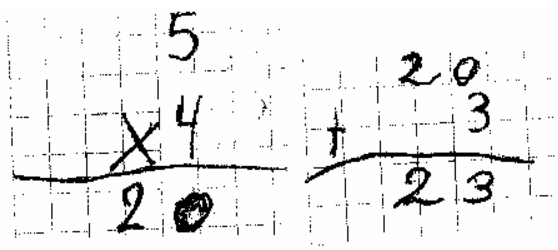
Esto implica que los alumnos puedan, inicialmente conocer algoritmos en los que hay un mayor registro escrito de los cálculos provisorios o intermedios. El objetivo es que los niños puedan controlar las acciones realizadas durante el proceso de la división. El algoritmo convencional “oculta” las descomposiciones de los números, las multiplicaciones y las restas. Estos algoritmos un poco más “desplegados” muestran aquellas operaciones. Evidentemente, estos cálculos intermedios, podrán ser abandonados por los alumnos a medida que ya no los precisen.

Para ello, hemos propuesto a los docentes de tercer año trabajar en esta pequeña secuencia de actividades:

- resolución de problemas diversos de división (ver parte I y II) y comparación y análisis de las estrategias utilizadas. Difundir la idea de que todos estos problemas se pueden resolver sumando, restando, multiplicando, etc. Análisis de escrituras diversas para registrar los cálculos
- dominio de un conjunto de cálculos multiplicativos (todos los relativos a la tabla pitagórica y multiplicaciones por la unidad seguida de ceros: 8 x 20; 45 x 1000; 6 x 50, etc.)
- resolución de cálculos mentales “horizontales” de divisiones con y sin resto (1000: 4; 3000: 6; 4500: 9; etc. y 51: 10 = 5 y sobra 1; 43: 4 = 10 y sobra 3)
- presentación de un algoritmo “desplegado” (con multiplicaciones, restas y tratando globalmente el número, sin descomponerlo)

Mostraremos a continuación producciones de los alumnos para ilustrar el trabajo sobre los algoritmos de este tipo. En el marco del trabajo antes mencionado de resolución de problemas de embaldosado en la escuela Nº 1 de Hurlingham, los niños produjeron escrituras espontáneas diversas para mostrar los cálculos realizados. Es interesante resaltar que dichas escrituras guardan relación con los números que conforman el algoritmo.



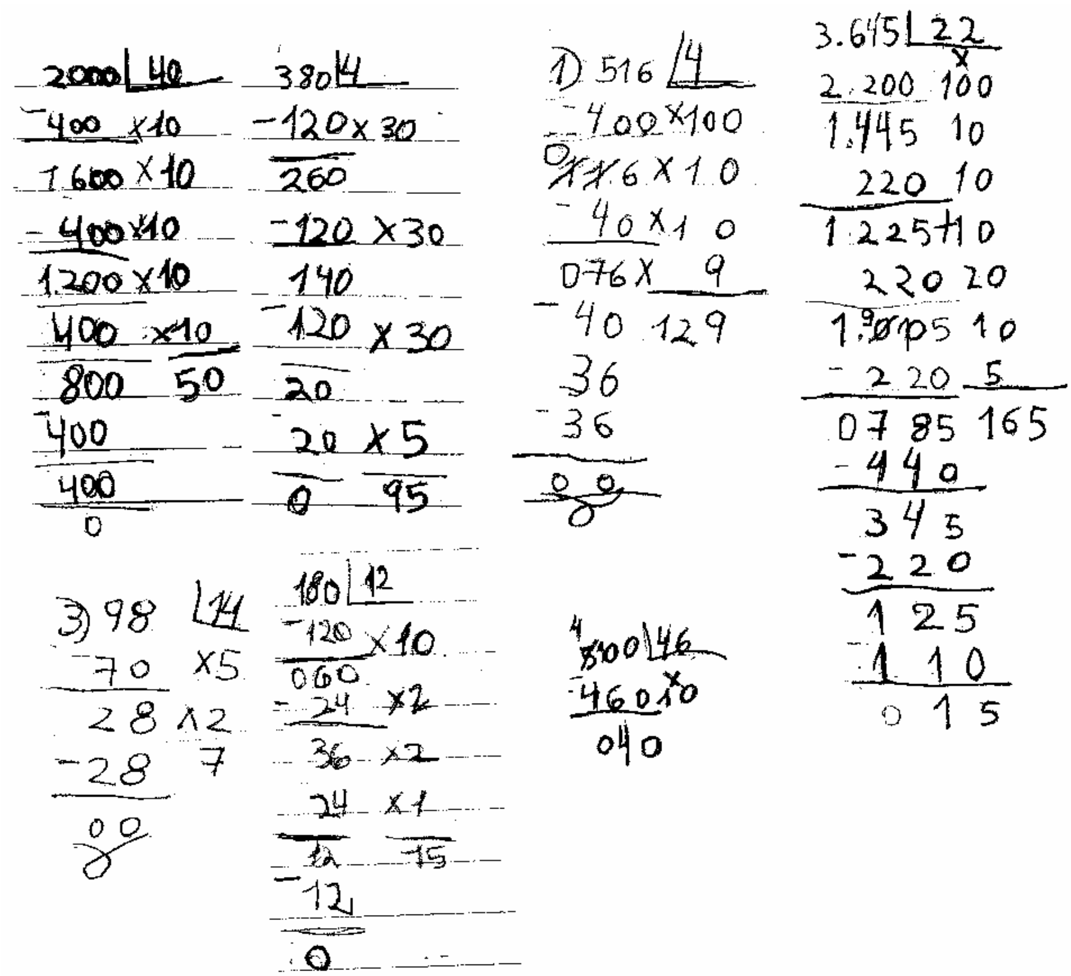


En ambos casos, se trata de una multiplicación y una suma o el registro del resto. Será tarea de la escuela, como se hizo en este caso, relacionar estas escrituras con los algoritmos correspondientes de división:

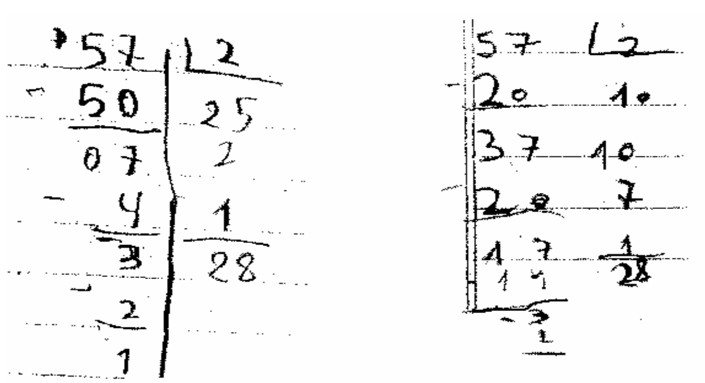
23	I 5	23	I 3
3	4	2	7

Hemos propuesto que, en las escrituras de los algoritmos, los alumnos, con el fin de tener mayor control sobre sus cálculos tengan la posibilidad de registrar los cálculos parciales que realizan, o bien de seleccionar la magnitud de los mismos.

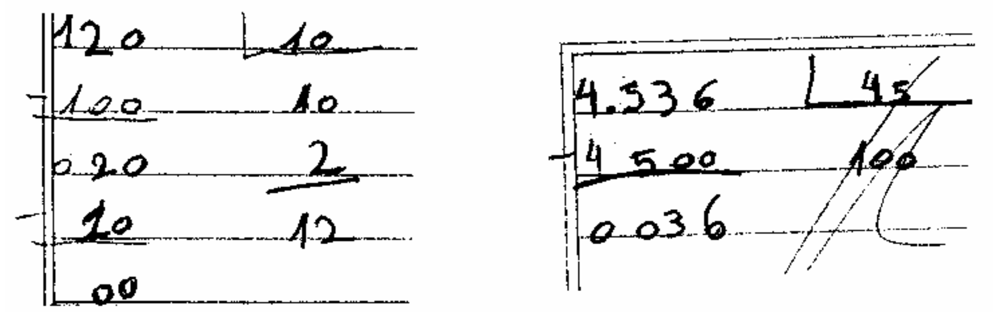
Por ejemplo, en la escuela Nº 14 de N. De La Riestra, (25 de Mayo) la maestra de 3º año Ana Migiotti les propone a los alumnos una serie de problemas que tienen la finalidad de “ensayar” algoritmos de división. En clases anteriores, los alumnos habían apelado a diferentes recursos para resolver problemas de división: restas sucesivas, sumas, aproximaciones por multiplicación. A partir de estas producciones de los alumnos, su maestra les presentó una organización de los cálculos que ellos estaban desplegando, llegando a escrituras como las siguientes:



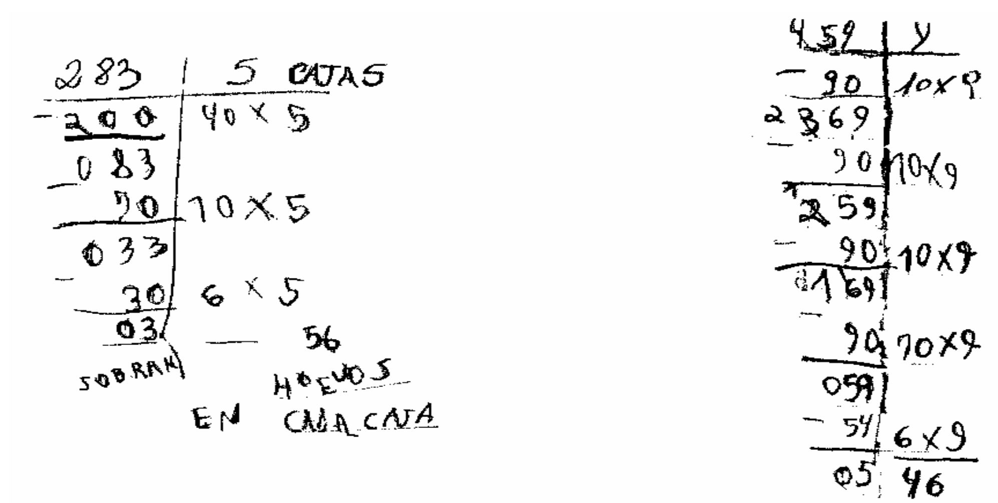
Y en la escuela Nº 3 de Roque Pérez, la maestra de tercer año, Mónica Mendez, también favorece que sus alumnos resuelvan las divisiones con el algoritmo que permite mostrar las multiplicaciones y restas que están “escondidas” en el algoritmo convencional. Por ejemplo, Lucas y Pedro hacen cálculos distintos al interior del algoritmo, llegando ambos al resultado correcto:



Otros alumnos, también de tercer año, resuelven de este modo los cálculos aún con cocientes de más cifras:



En la escuela Nº 1 “Bartolome Mitre”, la maestra Mónica Capurro también trabaja con sus alumnos de tercer año problemas que impliquen la división. Juan Angel resuelve los cálculos mostrando las multiplicaciones parciales que va realizando, de la siguiente manera:



Hemos tratado de mostrar, en esta tercera parte, un conjunto de actividades y producciones de los alumnos, cuya finalidad es la adquisición de una amplia gama de recursos de cálculo. Hacer más transparentes estos objetos para los niños, ha sido una de las preocupaciones del trabajo. Aprender a ver lo que los niños sí saben, recuperarlo en la clase y difundirlo ha sido la otra.

Como señalan diversos autores (Ferreiro, 1986 y Carraher, Carraher, Schlieman, 1991) los niños en contextos extraescolares, por necesidades de índole social, producen estrategias de cálculo propias. Estas, en general, en la escuela, no son reconocidas. Y paradójicamente la escuela, les ofrece numerosas veces otros recursos de cálculo “oscuros a sus ojos”, obsoletos presentados como si fueran los únicos. Y sin mostrar los vínculos entre unos y otros.

Desarmar este circuito que conduce a la discriminación y al fracaso de tantos niños en la escuela, es una de nuestras urgencias...

Parte IV: Las relaciones entre Dividendo, divisor, cociente y resto un objeto de estudio para el tercer ciclo.

Entre las ideas iniciales que forman parte del marco de este trabajo desarrollaremos en este punto la siguiente: *"El estudio de la división es de tal complejidad que exige muchos años de la escolaridad. Su enseñanza abarca también el tercer ciclo"*

Hemos mencionado anteriormente una variedad de problemas que involucran la división, como así un trabajo posible de desarrollar en torno a diferentes recursos de cálculo vinculados a esta operación.

La división entera puede ser un objeto de trabajo también en el tercer ciclo. La intención es que los alumnos se enfrenten a una nueva variedad de problemas a través de los cuales deban volver a analizar la relación Dividendo = cociente x divisor + resto; resto < divisor. Pero, en este ciclo, la división no solo permitirá resolver problemas de reparto o iteración, sino también, analizar y anticipar resultados. Es decir, se intenta que los alumnos puedan centrar el análisis en las condiciones que cumple cada uno de los números que intervienen en la "fórmula" $D = c \times d + r$ $(r < d)$, haciendo explícitas ciertas características de la relación.

En la Región V (Distrito de 3 de Febrero), se realizaron varios encuentros con maestros y profesores del tercer ciclo tendientes al análisis de las dificultades que tienen los alumnos cuando se enfrentan por primera vez al trabajo algebraico. Fue en el marco de dicho análisis que se propuso pensar cuestiones relacionadas con la división, a partir de un conjunto de problemas posibles. Estos problemas recuperan los saberes de los alumnos elaborados en los ciclos anteriores y presentan ciertas dificultades que ponen en juego nuevos conocimientos relacionados con la división.

Presentamos a continuación parte del Documento para Séptimo grado de la Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del G.C.B.A. (2001) inspirado en el trabajo de investigación realizado por la Profesora Patricia Sadovsky (UBA) en el marco de la articulación entre la aritmética y el álgebra[12].

Este material contiene varios de los ejemplos abordados con los docentes y un análisis didáctico de los mismos:

Ejemplo 1:

Proponer una cuenta de dividir en la que el divisor sea 45 y el resto 12. ¿Hay una sola? ¿Cuántas hay? ¿Por qué?

[12] Agradecemos a Patricia Sadovsky, Carmen Sessa y Gustavo Barallobres la autorización para reproducir esta parte.

Evidentemente, se trata de un problema que tiene infinitas soluciones, aunque los alumnos, en la búsqueda de la solución al problema, no anticipen este fenómeno.

Para hallar distintas cuentas puede ser que algunos alumnos atribuyan arbitrariamente un valor al cociente, lo multipliquen por el divisor y sumen el resto a este resultado para obtener el dividendo. Sin embargo, no puede esperarse que la mayoría realice de entrada este procedimiento. En numerosos casos, buscan azarosamente valores para el dividendo, realizan la cuenta e intentan corregir, mediante ensayos y errores, el valor del dividendo, de manera de aproximarse a la solución.

Ahora bien. esta situación pone de manifiesto un hecho particular, poco desarrollado en el segundo ciclo, que tiene que ver con la posibilidad de aceptar que ellos pueden atribuir valores arbitrarios al cociente y analizar que estos valoras son independientes del resto y del divisor. Estas cuestiones deberán ser elaboradas como producto del trabajo con este tipo de problemas.

Al mismo tiempo que un problema como el anterior contribuye a una reconceptualización de la división entera abre el camino a la movilización de la noción de variable: en la medida en que se modifica el valor asignado al cociente, se modifica el valor del dividendo. Más aún, si se va incrementando de 1 en 1 el valor del cociente, se incrementa de 45 en 45 el valor del dividendo. Para favorecer este análisis se podría ubicar en una tabla los valores del cociente y del dividendo, de modo de poner de manifiesto la regularidad de las modificaciones que se van operando:

Cociente	Dividendo
1	57
2	102
3	147
4	192
5	237

El trabajo puede continuarse con distintas preguntas como por ejemplo:

- *¿Será cierto que todos los dividendos que se pueden obtener terminarán con 7 o con 2? ¿por qué?*
- *¿Pueden encontrar un cociente y un dividendo de manera que este último sea mayor que 1000?*
- *¿Cuál es el dividendo más grande que pueden encontrar?*

Si en la clase ya se han resuelto algunos problemas que impliquen el recurso de usar fórmulas, se puede llegar a pedir que encuentren una fórmula para expresar todos los dividendos posibles.

El trabajo a desplegar en la resolución de esta situación adquiere una complejidad aún mayor que el propuesto para ciclos anteriores: la producción de infinitas soluciones para un problema, la validación de una propiedad sobre un conjunto infinito (*todos los dividendos posibles, que son infinitos, terminan en 2 o en 7*) y la problemática de la descripción de ese conjunto mediante una “fórmula” que permita obtener cualquier solución. Es sin duda un trabajo muy fértil cuando se piensa en la entrada al álgebra.

Sabemos que esta entrada al álgebra suele ser fuente de fracaso para muchos alumnos en los comienzos del secundario. Lo que estamos proponiendo es un trabajo en séptimo grado que, apoyándose en objetos muy conocidos para los alumnos- como es en este caso la división -, permita comenzar un trabajo que sirva como punto de apoyo para aprendizajes posteriores.

Hay otras cuestiones que son interesantes de abordar con los alumnos a partir de problemas que impliquen la división entre números naturales. Presentamos uno que tiene una cantidad finita de soluciones.

Ejemplo 2:

Proponer una cuenta de dividir en la cual el divisor sea 5 y el cociente sea 12. ¿Hay una sola cuenta? ¿Cuántas hay?

Una de las ideas centrales que mueve este problema es el hecho de que el resto puede adquirir únicamente los valores 0, 1, 2, 3 y 4, ya que debe ser menor que el divisor. Esta condición no es evidente para los alumnos cuando comienzan a buscar soluciones al problema. La discusión y la búsqueda de dividendos y restos que cumplan con las condiciones que plantea el problema debe permitir analizar que si se asignan azarosamente valores al dividendo, se puede llegar a obtener restos que no responden a las características del cociente entre naturales. La idea central es poder arribar a la conclusión de que sólo es posible que los dividendos sean 60, 61, 62, 63 y 64 pues, para estos dividendos, los restos que se obtienen serán menores que 5 (el divisor). Y este problema solo admite 5 soluciones. En este caso también se juega la idea de variable.

Veamos otro ejemplo que pone en juego el análisis de la cantidad de soluciones, pero que exigen pensar en otro tipo de condiciones, por ejemplo:

Ejemplo 3:

Buscar cuentas de dividir en las cuales el cociente sea 12 y el resto sea 6. ¿Cuántas hay?

En este caso, los alumnos pueden reconocer la posibilidad de proponer varias cuentas de dividir que cumplan con la condición que plantea el problema. Es posible que, apoyados en la relación D = c x d + r , identifiquen que al multiplicar 12 por cualquier número (divisor) y, a este resultado sumarle 6, se obtiene el dividendo. De esta manera aparecerán diferentes cuentas:

102	8	126	10	114	9
6	12	6	12	6	12

Es muy probable que aparezcan otras que se producen desde la misma relación, pero que no verifican la condición que plantea el problema, por ejemplo, al hacer la cuenta 12 x 4 + 6 se obtiene 54 , pero al hacer 54 : 4 se obtiene como cociente 13 y resto 2.

Si este tipo de errores no apareciera, es el docente el que podrá proponer este u otros ejemplos en los cuales se recurre a la relación D = c x d + r, pero el resultado obtenido no cumple con las condiciones del problema. El análisis de estos casos deberá permitir reconocer que, los ejemplos donde la cuenta es correcta, el resto es menor que el divisor y en donde resultó incorrecto, el resto era mayor que el divisor.

De esta manera, no solo se trata de una situación que permite pensar en un conjunto de soluciones, sino que podría ayudar a resignificar las condiciones que debe cumplir el resto en la división entre números naturales. Se espera poder concluir que hay infinitas cuentas posibles pero hay una que es "la primera de todas" o "la más chica": aquella donde el divisor es 7 y en consecuencia, el dividendo resulta 90. "De allí en adelante, se pueden armar todas las cuentas que se nos ocurra"

Otro tipo de situaciones deberá permitir analizar la imposibilidad de encontrar solución al problema, por ejemplo:

<u>*Ejemplo 4:*</u>

¿Es posible que en una cuenta de dividir, el dividendo sea 32, el cociente 12 y el resto 1? ¿Por qué?

En este caso se espera que los alumnos puedan identificar que el cociente admite un único valor, ya que es el resultado de hacer 32: 12 y su cociente es 2. Pero en consecuencia el resto deberá ser 8 y no 1 como plantea el problema. A partir de este análisis se podrá proponer a los alumnos modificar el valor del dividendo de manera que sí admita solución. O bien, modificar el valor del resto. Este tipo de situaciones exige un análisis pormenorizado de las características que adquiere cada uno de los números que intervienen en una cuenta de dividir.

Para la resolución de los problemas planteados anteriormente no se espera , ni se pretende exigir a los alumnos, el uso de letras que representen el problema. Si algún alumno apela a ellas, será "bienvenido", pero no estamos pensando a esta altura que sean las letras el recurso usado para resolver los problemas.

Más bien estamos imaginando un trabajo en el cual se aceptarán escrituras no convencionales producidas por los alumnos, argumentaciones basadas en ciertas propiedades, enunciadas verbalmente o apoyadas en escrituras poco precisas, no formales. No se apunta en esta etapa a la introducción de la escritura de las ecuaciones involucradas.

Se piensa más que nada en actividades de exploración, y, a partir de allí, a medida que los alumnos avancen en la resolución y análisis de los problemas, el docente podrá trabajar sobre el conjunto de condiciones que determinan que dichos problemas tengan una, varias, ninguna o infinitas soluciones. Los alumnos tendrán una oportunidad para resignificar las características de la cuenta de dividir, las condiciones que cumplen o deben cumplir cada uno de los números que intervienen en dicha cuenta.

El análisis de la relación $D = c \times d + r \quad (0 \leq r < d)$ permitirá identificar, entre otras cosas que, fijados el divisor y el resto, el cociente es independiente de éstos y puede atribuírsele cualquier valor. En tanto que si se fijan el cociente y el resto, el divisor podrá admitir cualquier valor mayor que el resto, etc.

Como decíamos a propósito del ejemplo 4, pensamos que en el trabajo con este tipo de problemas, los alumnos adquieren algunas ideas conceptuales que son herramientas muy propicias para el trabajo algebraico.

Por otro lado, se considera que la familiaridad que los alumnos tienen con los números naturales constituye un buen punto de apoyo para abordar el tratamiento de lo general que es una de las características de aquello que los alumnos deben comenzar a concebir como parte del trabajo en matemática.

Conclusiones

Hemos intentado mostrar a lo largo de este documento el trabajo realizado con un conjunto de docentes de diferentes escuelas y regiones de la Provincia en torno a la enseñanza de la división.

Destacamos que la complejidad de este contenido es tal que debe abarcar los tres ciclos de la escolaridad. Con el fin de distinguir los diferentes aspectos que pueden ser abordados sistemáticamente en cada uno de ellos, proponemos a continuación un ensayo de distribución por ciclos o años tomando como fuentes el Diseño Curricular de la Provincia de Bs. As. y considerando como complemento, los Pre Diseños Curriculares de la Ciudad de Bs. As.

No se trata de una prescripción, sino de un aporte para ser sometido a debate en cada escuela.

Contenidos sobre la división en el Primer ciclo[13]

- Interpretación de los significados y usos de las cuatro operaciones básicas con números naturales, elaborando e implementando estrategias de cálculo en forma exacta y aproximada, produciendo y resolviendo situaciones problemáticas.
- Estimación e interpretación de resultados de cálculos en forma mental, por escrito y con uso de calculadora, comprobando su razonabilidad y justificando los procedimientos empleados.
- Resolución de problemas de reparto y partición mediante diferentes procedimientos (dibujos, conteo, sumas o restas reiteradas) en primero y segundo año
- Resolución de problemas correspondientes a diferentes significados de la división (partición, reparto, organizaciones rectangulares, series proporcionales, iteración, etc.) por medio de variados procedimientos (sumas o restas reiteradas, multiplicaciones) en segundo y tercer año.
- Dominio progresivo de variados recursos de cálculo que permitan realizar divisiones: sumas sucesivas, restas sucesivas, aproximaciones mediante productos, uso de resultados multiplicativos en combinación con restas, etc, entre segundo y tercer año.
- Utilización de resultados numéricos conocidos y de las propiedades de los números y las operaciones para resolver otros cálculos. Explicitación, por parte de los alumnos, de las estrategias utilizadas. Comparación posterior de las mismas, en los tres primeros años.
- Cálculos mentales de multiplicaciones y divisiones apoyándose en resultados conocidos, en propiedades del sistema de numeración o de las operaciones, en segundo y tercer año.

[13] En aquellos contenidos en los que no se especifica el año, se considera su tratamiento en todo el ciclo.

- Elaboración de distintas estrategias de cálculo aproximado para resolver problemas en los cuales no sea necesario un cálculo exacto.
- Construcción del algoritmo desplegado de la división a partir de los recursos elaborados por lo alumnos en tercer año

Contenidos sobre la división en el Segundo ciclo

- Comprensión del significado y aplicación de las operaciones básicas con números naturales
- Utilización adecuada de los algoritmos convencionales, justificando las estrategias desarrolladas
- Resolución de problemas de organizaciones rectangulares utilizando la multiplicación y la división en cuarto año.
- Resolución de problemas de reparto - con incógnita tanto en la cantidad de partes como en el valor de cada parte –utilizando el algoritmo de la división o procedimientos de cálculo mental en cuarto y quinto años.
- Resolución de problemas de división que involucren un análisis del resto en cuarto y quinto años.
- Elaboración de distintas estrategias de cálculo exacto y aproximado (algorítmico, mental o con calculadora).
- Estimación del resultado de multiplicaciones y divisiones y cálculo de número de cifras de cociente en cuarto y quinto años.
- Construcción del algoritmo de la división en cuarto año a partir del algoritmo desplegado utilizado en tercer año.
- Resolución de problemas de iteración inicialmente por medio de restas o sumas sucesivas , de multiplicaciones y luego por medio de divisiones en quinto y sexto años.
- Utilización de las relación $D = c \times d + r$ y $r < d$ para resolver problemas en quinto y sexto años.
- Cálculo mental de multiplicaciones y divisiones apoyándose en propiedades de las operaciones.
- Utilización de la calculadora para resolver situaciones problemáticas y para controlar divisiones realizadas por otros procedimientos.
- Utilización de la calculadora para verificar relaciones anticipadas entre números y operaciones.
- Uso de la calculadora para reconstruir el resto de la división en quinto y sexto años

Contenidos sobre la división en el Tercer ciclo

- Estimación, interpretación y comunicación de los cálculos, comprobando su razonabilidad, valorando la precisión en la expresión de los mismos y justificando los procedimientos empleados
- Análisis de la relación Dividendo = Cociente x divisor + resto (con $r < d$).Establecimiento de condiciones a partir de las cuales esta relación admite infinitos valores, una solución única, no admite solución, etc.
- Primeras escrituras de las soluciones que admite la relación en términos algebraicos

Bibliografía

- Barallobres, G.; Itzcovich, H; Sadovsky, P ; Sessa, C (2001) : Documento para séptimo grado. Dirección de Currícula. G.C.B.A.
- Broitman, C. (1998): "La Enseñanza de la División en los primeros grados" en Revista En el Aula. Ministerio de Cultura y Educación. Número aparecido en el mes de Julio
- Broitman, C. (1999): Las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula. Ediciones Novedades Educativas. Bs. As.
- Brousseau, G (1994) Problemas en la Enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales. Publicación de IMAF, Universidad Nacional de Córdoba.
- Carraher, T.; Carraher, D. ; y Schliemann, A. (1991): En la vida diez, en la escuela cero. México, Siglo XXI
- Charnay, R (1994): "Aprender por medio de la resolución de problemas". En: Didáctica de Matemáticas, Parra, C y Saiz,I.(Comp),Editorial Paidós.
- Diseño Curricular Provincia de Bs. As. Tomo I (1999).
- Documento Nº 1 /97. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- D.E.P. Prov. Bs. As.
- Documento Nº 1 /99. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática- D.E.P. Prov. Bs. As.
- Ferreiro, E. (1986): El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria" , en: Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso. Bs. As. CEAL
- Lerner, D. (1996) "La enseñanza y el aprendizaje escolar" en Castorina, Ferreiro, Lerner, Oliveira: Piaget- Vigotsky: contribuciones para plantear el debate. Bs. As. Paidós.
- Lerner, Delia (1992): La Matemática en la escuela Ed Aique. (Capítulo 2 de Cuentas y problemas)
- Lerner, Delia y Sadovsky, Patricia: "El sistema de numeración: un problema didáctico" En Parra, c y Saiz, I, Didáctica de la Matemática. Paidós, 1994
- Panizza, Sadovsky: El papel del problema en la construcción de conocimientos matemáticos. El caso de la proporcionalidad. FLACSO, 1992
- Parra, C. (1994): "El cálculo mental en la escuela Primaria", en Parra y Saiz, Didáctica de Matemática. Paidós.
- Sadovsky, Parra, Itzcovich, Broitman (1997): Documento de Actualización Didáctica nº4. Matemática. Segundo Ciclo de la EGB, MCBA
- Sadovsky, Parra, Itzcovich, Broitman (1999): Pre Diseño Curricular. Matemática.(Tomos: Marco Gral., EGB 1 y EGB 2). Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Saiz, I. "Dividir con dificultad o la dificultad de dividir" en Parra y Saiz, op. cit.
- Vergnaud, G. (1997): Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de Nuevo? Ed Edicial. Bs.As.
- Vergnaud, G. (l976): El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela, Ed Trillas, Méjico